

H. LAURENT

Sur la théorie des équations différentielles ordinaires

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 19 (1880), p. 153-161

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__153_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1880, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

les intégrales des équations (1) résolues par rapport aux constantes d'intégration $c_1, c_2, \dots, c_n$. Si l'on diffé-

rentie ces équations (2), on aura

$$(3) \quad dF_1 = 0, \quad dF_2 = 0, \quad \dots, \quad dF_n = 0,$$

et ces équations devront fournir pour les rapports

$$dx_1 : dx_2 : \dots : dx_{n+1}$$

les mêmes valeurs que les équations (1). On sait en effet que, en éliminant entre les intégrales (2) et leurs différentielles les constantes d'intégration, on doit retomber sur un système équivalent à (1). Ce système équivalent est le système (3).

Or, les formules (1) et (3) fournissant les mêmes valeurs des quantités $dx_1 : dx_2 : \dots : dx_{n+1}$, on sait, d'après la théorie des équations linéaires, que l'une quelconque des formules (3) est de la forme

$$\lambda_1 \Omega_1 + \lambda_2 \Omega_2 + \dots + \lambda_n \Omega_n = 0,$$

ce qui met en évidence l'existence des facteurs λ .

Il existe une infinité de systèmes de multiplicateurs.
En effet, soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ un tel système, et soit

$$\lambda_1 \Omega_1 + \lambda_2 \Omega_2 + \dots + \lambda_n \Omega_n = dF_1.$$

Il est clair que, φ désignant une fonction quelconque, $\lambda_1 \varphi(F_1), \lambda_2 \varphi(F_1), \dots$ sera encore un système de multiplicateurs. Soient plus généralement

$$\begin{aligned} &\lambda_{11}, \lambda_{12}, \dots, \lambda_{1n}, \\ &\lambda_{21}, \lambda_{22}, \dots, \lambda_{2n}, \\ &\dots, \dots, \dots, \dots, \\ &\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \dots, \lambda_{in} \end{aligned}$$

i systèmes de **multiplicateurs** et

$$\sum \lambda_{ij} \Omega_j = dF_1, \quad \sum \lambda_{2j} \Omega_j = dF_2, \quad \dots, \quad \sum \lambda_{ij} \Omega_j = dF_i;$$

il est clair que

$$\begin{aligned} & \lambda_{11}\varphi_1(\mathbf{F}_1) + \lambda_{12}\varphi_2(\mathbf{F}_2) + \dots + \lambda_{1n}\varphi_n(\mathbf{F}_n), \\ & \lambda_{21}\varphi_1(\mathbf{F}_1) + \lambda_{22}\varphi_2(\mathbf{F}_2) + \dots + \lambda_{2n}\varphi_n(\mathbf{F}_n), \\ & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

constituera, quelles que soient les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots$, un nouveau système de multiplicateurs. Mais *il n'existe que n systèmes de multiplicateurs distincts.*

En effet, il n'existe que n intégrales distinctes de la forme (3); par conséquent, si l'on appelle

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_{11}, \lambda_{12}, \dots, \lambda_{1n}, \\ \lambda_{21}, \lambda_{22}, \dots, \lambda_{2n}, \\ \dots, \dots, \dots, \dots, \\ \lambda_{n1}, \lambda_{n2}, \dots, \lambda_{nn} \end{array} \right.$$

les systèmes de multiplicateurs qui, appliqués aux équations (1), donnent lieu aux intégrales (2), toute intégrale du système (1) sera de la forme

$$\psi(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n) = \text{const.}$$

Tout système de multiplicateurs appliqué aux équations (1) devra donc fournir une différentielle de la forme

$$\frac{d\psi}{d\mathbf{F}_1} d\mathbf{F}_1 + \frac{d\psi}{d\mathbf{F}_2} d\mathbf{F}_2 + \dots + \frac{d\psi}{d\mathbf{F}_n} d\mathbf{F}_n = 0,$$

et sera, par suite, une combinaison des multiplicateurs (4).

Pour nous en convaincre, écrivons ainsi la formule précédente

$$\frac{d\psi}{d\mathbf{F}_1} (\lambda_{11}\Omega_1 + \lambda_{12}\Omega_2 + \dots) + \frac{d\psi}{d\mathbf{F}_2} (\lambda_{21}\Omega_1 + \lambda_{22}\Omega_2 + \dots) + \dots = 0,$$

et nous reconnaissons que les multiplicateurs en question

sont

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dF_1} \lambda_{11} + \frac{d\psi}{dF_2} \lambda_{21} + \dots + \frac{d\psi}{dF_n} \lambda_{n1}, \\ \frac{d\psi}{dF_1} \lambda_{12} + \frac{d\psi}{dF_2} \lambda_{22} + \dots + \frac{d\psi}{dF_n} \lambda_{n2}, \\ \dots\dots\dots \end{aligned}$$

Remarque. — Les équations différentielles proposées peuvent être remplacées par les suivantes, que l'on en déduit par l'application des multiplicateurs (4),

$$\begin{aligned} \lambda_{11}\Omega_1 + \lambda_{12}\Omega_2 + \dots + \lambda_{1n}\Omega_n - 0 &= dF_1, \\ \lambda_{21}\Omega_1 + \lambda_{22}\Omega_2 + \dots + \lambda_{2n}\Omega_n - 0 &= dF_2, \\ \dots\dots\dots, \\ \lambda_{n1}\Omega_1 + \lambda_{n2}\Omega_2 + \dots + \lambda_{nn}\Omega_n - 0 &= dF_n, \end{aligned}$$

et qui sont immédiatement intégrables. Ces dernières équations sont satisfaites, non seulement quand on y suppose $\Omega_1 = 0, \Omega_2 = 0, \dots$, mais encore quand, $\Omega_1, \Omega_2, \dots$ cessant d'être nuls, $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ ont des valeurs telles que le déterminant Λ des multiplicateurs (4) soit nul; on a d'ailleurs identiquement

$$\Omega_1 = \frac{1}{\Lambda} \left(\frac{d\Lambda}{d\lambda_{11}} dF_1 + \frac{d\Lambda}{d\lambda_{21}} dF_2 + \dots + \frac{d\Lambda}{d\lambda_{n1}} dF_n \right) \dots,$$

de sorte que l'on peut annuler les quantités Ω soit en posant $dF_1, dF_2, \dots$ égaux à zéro, soit en posant $\frac{1}{\Lambda}$ égal à zéro ou $\Lambda = \infty$. Ainsi, en égalant à zéro l'inverse du déterminant des systèmes de multiplicateurs, on peut obtenir une solution des équations proposées.

Nous avons dit qu'il n'existait que n systèmes de multiplicateurs distincts. Si donc on connaissait un système de multiplicateurs distincts, le système (4) par exemple, tout nouveau système rentrerait dans celui-ci, en sorte que, $\lambda_{n+1,1}, \lambda_{n+1,2}, \dots$ désignant de nouveaux

un système canonique. En effet, on peut les écrire

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dx} &= \frac{dH}{d\lambda_1}, & \frac{dx_2}{dx} &= \frac{dH}{d\lambda_2}, & \dots, \\ \frac{d\lambda_1}{dx} &= -\frac{dH}{dx_1}, & \frac{d\lambda_2}{dx} &= -\frac{dH}{dx_2}, & \dots \end{aligned}$$

Tout système d'équations linéaires peut donc se ramener à un système canonique. contenant, il est vrai, un nombre double d'équations, mais dont on connaît une solution (10).

La recherche des multiplicateurs est un peu plus facile en général que la résolution des équations proposées elles-mêmes. Supposons, en effet, le système des équations à intégrer ramené à la forme

$$(11) \quad \frac{dx_1}{dx} = X_1, \quad \frac{dx_2}{dx} = X_2, \quad \dots, \quad \frac{dx_n}{dx} = X_n.$$

Si l'on appelle $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ un système de multiplicateurs, on devra avoir

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} &\lambda_1 dx_1 + \lambda_2 dx_2 + \dots \\ &+ \lambda_n dx_n - dx(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n) = \text{diff. exacte.} \end{aligned} \right.$$

Mais trouver des fonctions $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ satisfaisant à cette condition, c'est intégrer l'équation aux dérivées partielles

$$(13) \quad \frac{du}{dx} + X_1 \frac{du}{dx_1} + \dots + X_n \frac{du}{dx_n} = 0,$$

et les dérivées $\frac{du}{dx_1}, \dots, \frac{du}{dx_n}$ de la fonction u seront les multiplicateurs cherchés. Pour trouver un système de multiplicateurs, il n'est donc pas nécessaire d'intégrer complètement l'équation (12), équivalente aux équations (11), il suffit d'avoir seulement les dérivées relatives à $x_1, x_2, \dots, x_n$ de la fonction u qui y satisfait.

On pourrait de la théorie précédente déduire la méthode connue pour l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles. A cet effet, on raisonnera ainsi :

Intégrer l'équation (13), ou

$$\frac{du}{dx} + X_1 \lambda_1 + \dots + X_n \lambda_n = 0,$$

dans laquelle on a posé pour simplifier $\frac{du}{dx_i} = \lambda_i$, c'est trouver des quantités $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ telles que l'équation (12) ait lieu. Or $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ ne sont autre chose que les multiplicateurs des équations (11). On calculera ces multiplicateurs, si l'on veut, en intégrant ces équations (11). Soit $u = \text{const.}$ une intégrale du système (11) en question; on aura précisément

$$\lambda_1 dx_1 + \dots + \lambda_n dx_n - dx(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n) = du,$$

d'où l'on conclura que u est précisément la fonction qui, égalée à une constante, est une intégrale de (11).

Cette manière de retrouver la règle donnée par Lagrange et confirmée par Jacobi a peut-être l'avantage d'entrer plus au cœur de la question et de mieux montrer le rôle que jouent les fonctions intégrales et leurs dérivées.