

CH. BIEHLER

**Sur une classe d'équations algébriques
dont toutes les racines sont réelles**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 19
(1880), p. 149-152

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__149_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1880, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES DONT
TOUTES LES RACINES SONT RÉELLES ;**

PAR M. CH. BIEHLER.

I. Considérons l'équation

$$(1) \quad \left(\frac{1 + ix}{1 - ix} \right)^m = A + Bi,$$

dans laquelle le module du second membre est égal à l'unité; nous allons démontrer que les racines de cette équation sont réelles et inégales.

En effet, soit $a_\mu + ib_\mu$ une des m valeurs de l'expression $\sqrt[m]{A + Bi}$; on sait que $a_\mu^2 + b_\mu^2 = 1$, et la racine x_μ de l'équation (1) correspondant à cette valeur sera donnée par l'équation

$$(2) \quad \frac{1 + ix_\mu}{1 - ix_\mu} = a_\mu + ib_\mu,$$

d'où

$$(3) \quad x_\mu = \frac{i(1 - a_\mu - ib_\mu)}{1 + a_\mu + ib_\mu}.$$

En multipliant les deux termes du second membre par $1 + a_\mu - ib_\mu$, il viendra

$$x_\mu = \frac{2b_\mu}{(1 + a_\mu)^2 + b_\mu^2}$$

ou

$$(4) \quad x_\mu = \frac{b_\mu}{1 + a_\mu}.$$

Toutes les racines de l'équation (1) sont donc réelles.

Elles sont inégales, car, si deux racines x_λ, x_μ étaient

égales, on aurait

$$(5) \quad \frac{b_\lambda}{1 + a_\lambda} = \frac{b_\mu}{1 + a_\mu}.$$

En vertu des relations

$$\begin{aligned} a_\lambda + b_\lambda^2 &= 1, \\ a_\mu + b_\mu^2 &= 1, \end{aligned}$$

l'équation (5) devient

$$(6) \quad \frac{1 - a_\lambda}{b_\lambda} = \frac{1 - a_\mu}{b_\mu}.$$

La comparaison des égalités (5) et (6) donne

$$a_\lambda = a_\mu, \quad b_\lambda = b_\mu;$$

par suite, comme les m valeurs de $\sqrt[m]{A + Bi}$ sont distinctes, les m racines de l'équation (1) seront aussi distinctes.

II. Comme première application de ce théorème, nous allons démontrer algébriquement que les racines de l'équation de degré m qui donne les valeurs de $\operatorname{tang} \frac{\alpha}{m}$, connaissant $\operatorname{tang} \alpha$, sont réelles et inégales.

Cette équation peut s'écrire

$$(7) \quad ia = \frac{(1 + ix)^m - (1 - ix)^m}{(1 + ix)^m + (1 - ix)^m},$$

en posant

$$\operatorname{tang} \alpha = a \quad \text{et} \quad \operatorname{tang} \frac{\alpha}{m} = x.$$

L'équation (7) peut aussi se mettre sous la forme

$$(1 + ix)^m(1 - ia) - (1 - ix)^m(1 + ia) = 0$$

ou bien

$$(8) \quad \left(\frac{1 + ix}{1 - ix} \right)^m = \frac{1 + ia}{1 - ia}.$$

Le second membre de cette équation est une expression dont le module est égal à l'unité ; ce module est, en effet, la racine carrée de la quantité

$$\frac{(1 - a^2)^2 + 4a^2}{(1 + a^2)^2};$$

on en conclut, en se reportant au théorème démontré précédemment, que les racines de l'équation (7) sont réelles et inégales.

Pour la même raison, les racines des équations

$$(9) \quad (1 + ix)^m - (1 - ix)^m = 0,$$

$$(10) \quad (1 + ix)^m + (1 - ix)^m = 0,$$

tirées de (7) en y faisant $a = 0$ et $a = \infty$, sont réelles et inégales.

On peut d'ailleurs les mettre sous la forme

$$(11) \quad \left(\frac{1 + ix}{1 - ix} \right)^m = 1,$$

$$(12) \quad \left(\frac{1 + ix}{1 - ix} \right)^m = -1;$$

les seconds membres ont pour module l'unité.

III. Comme seconde application du même théorème, nous allons démontrer que les racines de l'équation de degré m qui donne $\cos \frac{\alpha}{m}$ quand on connaît $\cos \alpha$ sont réelles.

Si l'on pose $\cos \frac{\alpha}{m} = x$, $\cos \alpha = a$, l'équation dont il s'agit est

$$(13) \quad (x + \sqrt{x^2 - 1})^m + (x - \sqrt{x^2 - 1})^m - 2a = 0.$$

Faisons actuellement la substitution

$$x = \frac{1 - y^2}{1 + y^2};$$

à toute valeur réelle de y correspond une valeur réelle de x .

Par cette substitution, $x^2 - 1$ devient $\frac{-4y^2}{(1+y^2)^2}$, et l'équation (13) prend la forme

$$(14) \quad \frac{(1 + 2iy - y^2)^m + (1 - 2iy - y^2)^m}{(1 + y^2)^m} - 2a = 0,$$

ou bien

$$(15) \quad \frac{(1 + iy)^{2m} - (1 - iy)^{2m}}{(1 + y^2)^m} - 2a = 0,$$

ou enfin

$$(16) \quad \left(\frac{1 + iy}{1 - iy}\right)^m + \left(\frac{1 - iy}{1 + iy}\right)^m - 2a = 0.$$

Cette équation est du deuxième degré en $\left(\frac{1 + iy}{1 - iy}\right)^m$; elle donne

$$(17) \quad \left(\frac{1 + iy}{1 - iy}\right)^m = a \pm i\sqrt{1 - a^2}.$$

Le module de chacune des expressions $a + i\sqrt{1 - a^2}$, $a - i\sqrt{1 - a^2}$ est égal à l'unité; par suite, les racines de l'équation en y sont toutes réelles.

On obtient ainsi $2m$ valeurs de y ; ces $2m$ valeurs de y ne fournissent que m valeurs de x . Les expressions conjuguées $a + i\sqrt{1 - a^2}$, $a - i\sqrt{1 - a^2}$ fournissent en effet, pour $\left(\frac{1 + iy}{1 - iy}\right)^m$, des valeurs qui sont elles-mêmes conjuguées; par suite, les valeurs de y correspondantes seront de signes contraires. Les valeurs de y^2 sont donc égales deux à deux et donnent une seule et même valeur pour x .