

ÉDOUARD LUCAS

Sur un théorème de M. Laguerre

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 19
(1880), p. 145-147

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__145_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1880, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UN THÉORÈME DE M. LAGUERRE;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

M. Laguerre a exposé dernièrement quelques considérations nouvelles et fort remarquables sur la séparation des racines d'une équation algébrique à coefficients numériques (*Nouvelles Annales*, 2^e série, t. XVIII, p. 1, et t. XIX, p. 49; *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 13 octobre 1879).

Voici, je pense, une manière plus simple et plus élémentaire de présenter le principal résultat, sans qu'il soit nécessaire d'employer la théorie des dérivées.

THÉORÈME DE LAGUERRE. — Soient $f(x) = 0$ une équation algébrique, a un nombre positif, et

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{f(x)}{x-a} &= f_0 x^{m-1} + f_1 x^{m-2} \\ &+ f_2 x^{m-3} + \dots + f_{m-1} + \frac{f_m}{x-a}. \end{aligned} \right.$$

Le nombre des variations de la suite

$$(2) \quad f_0, f_1, f_2, \dots, f_{m-1}, f_m$$

est au moins égal au nombre des racines de l'équation donnée qui sont plus grandes que a . Si le nombre des racines plus grandes que a est inférieur au nombre des variations de la suite, la différence est un nombre pair.

Nous remarquerons d'abord que pour $a = 0$ on retrouve le théorème de Descartes. Quant à la démonstration, elle est absolument semblable à celle que l'on

donne dans les Cours pour ce dernier théorème. En effet, soit b un nombre plus grand que a ; si l'on multiplie le premier membre de l'équation (1) par $x-b$, on a

$$\frac{(x-b)f(x)}{x-a} = g_0 x^m + g_1 x^{m-1} + \dots \\ + g_{m-1} x + g_m - (b-a) \frac{f_m}{x-a},$$

et l'on démontre de même que le nombre des variations de la suite

$$(3) \quad g_0, g_1, \dots, g_{m-1}, g_m - bf_m$$

surpasse au moins d'une unité, et en général d'un nombre impair, le nombre des variations de la suite (2).

C. Q. F. D.

Cela posé, soient l'équation

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \dots + A_m = 0,$$

et a un nombre positif; on calcule successivement

$$\begin{aligned} f_0 &= A_0, \\ f_1 &= A_0 a + A_1, \\ f_2 &= A_0 a^2 + A_1 a + A_2, \\ f_3 &= A_0 a^3 + A_1 a^2 + A_2 a + A_3, \\ &\dots \dots \dots, \\ f_m &= A_0 a^m + A_1 a^{m-1} + A_2 a^{m-2} + \dots + A_m. \end{aligned}$$

Le nombre des variations de $(f_0, \dots, f_m)$ est une limite supérieure du nombre des racines plus grandes que a . De même, en changeant x en $\frac{1}{x}$, on déduit que le nombre des racines de l'équation proposée comprises entre 0 et a ne peut surpasser le nombre des variations

de la suite

$$\begin{aligned} & A_m, \\ & A_m \frac{1}{a} + A_{m-1}, \\ & A_m \frac{1}{a^2} + A_{m-1} \frac{1}{a} + A_{m-2}, \\ & \dots\dots\dots, \\ & A_m \frac{1}{a^m} + A_{m-1} \frac{1}{a^{m-1}} + \dots + A_0; \end{aligned}$$

de plus, si ces deux nombres diffèrent, la différence est un nombre pair.

Exemple. — Soit l'équation

$$x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7x + 1 = 0.$$

D'après le théorème de Descartes, il y a, au plus, quatre racines positives.

Pour $a = 1$, on forme la suite

$$+1, -3, 0, -2, +5, +6;$$

donc il y a au plus deux racines plus grandes que 1; en formant la suite inverse, on trouve

$$+1, +8, +6, +9, +5, +6;$$

donc il n'y a pas de racines réelles entre 0 et 1; ainsi il y a au plus deux racines positives, que l'on sépare en faisant $a = 2$.

Remarque. — On peut appliquer les considérations qui précèdent aux équations de la forme

$$f(x) + \frac{A}{(x-a)\varphi(x)} = 0 \quad \text{et} \quad f(x) + \frac{A}{x-a} \varphi(x) = 0,$$

et l'on obtient des théorèmes intéressants.