

EM. LEMOINE

**Quelques théorèmes sur les tétraèdres
dont les arêtes opposées sont égales deux à
deux, et solution de la question 1272**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 19
(1880), p. 133-138

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__133_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1880, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**QUELQUES THÉORÈMES SUR LES TÉTRAÈDRES DONT LES
ARÊTES OPPOSEES SONT EGALES DEUX A DEUX, ET
SOLUTION DE LA QUESTION 1272;**

PAR M. EM. LEMOINE.

Soit $SABC$ le tétraèdre

$$(SA = CB = a, SB = AC = b, SC = AB = c).$$

(¹) L'auteur s'est imposé inutilement la condition que l'axe des x coupe la conique en deux points réels.

Soient

$A', B', C', \alpha, \beta, \gamma$ les milieux de SA, SB, SC, BC, AC, AB ;

$\omega_s, \omega_a, \omega_b, \omega_c$ les pieds sur chaque face des hauteurs du tétraèdre;

$\omega'_s, \omega'_a, \omega'_b, \omega'_c$ les points de concours des hauteurs de chaque face;

O le centre de gravité;

O_s le centre du cercle circonscrit à la face ABC .

Soient

α' l'angle que la face SAC fait avec SAB ;

α' l'angle que la face CBA fait avec CBS ;

γ, γ', z, z' les autres angles des faces entre elles.

Si, dans un tétraèdre, les quatre faces sont équivalentes, elles sont égales et, par suite, les arêtes opposées sont égales deux à deux.

En écrivant que la somme des projections de trois faces sur la quatrième est égale à cette quatrième, on a

$$1 = \cos \alpha' + \cos \gamma' + \cos z',$$

$$1 = \cos \alpha + \cos \gamma + \cos z',$$

$$1 = \cos \gamma + \cos z + \cos \alpha',$$

$$1 = \cos z + \cos \alpha + \cos \gamma'.$$

Ajoutons ensemble les deux premières de ces équations, puis les deux dernières; retranchons ces deux sommes l'une de l'autre, et divisons par 2, il vient

$$0 = \cos z' - \cos z;$$

d'où, *sans ambiguïté*, $z = z'$. On aurait de même $\alpha = \alpha'$, $\gamma = \gamma'$.

Les angles trièdres de chaque sommet étant composés

de dièdres égaux entre eux deux à deux, ces trièdres sont égaux; les angles plans de ces trièdres sont donc égaux deux à deux; les faces du tétraèdre sont alors semblables; mais, comme elles sont équivalentes par hypothèse, elles sont égales, etc.

On a

$$\beta B = \beta S,$$

puisque les triangles SCA, BCA sont égaux; donc $\beta B'$ est perpendiculaire à SB. Par suite, $OS = OB$; de même, $OS = OA$, $OS = OC$. On voit donc que :

Le centre de la sphère circonscrite coïncide avec le centre de gravité du tétraèdre.

La distance de O à chaque face est le quart de la hauteur du tétraèdre opposée à cette face. Mais ces hauteurs sont égales; donc le point O est à égale distance des quatre faces, c'est-à-dire que :

Le centre de la sphère inscrite au tétraèdre coïncide avec le centre de gravité.

$\omega_s O_s$, $\omega_a O_a$, $\omega_b O_b$, $\omega_c O_c$ sont égaux comme représentant la distance de points analogues dans les faces qui sont des triangles égaux. Mais ces longueurs égales représentent aussi les distances de O aux hauteurs $S\omega_s$, $S\omega_a$, $S\omega_b$, $S\omega_c$; donc :

Il y a une sphère de centre O tangente aux quatre hauteurs du tétraèdre.

Soit M_s le centre de gravité de ACB; M_s , O_s , ω_s sont en ligne droite, et $O_s \omega_s = 3 M_s O_s$. Mais M_s , ω'_s , O_s sont aussi en ligne droite, et l'on a

$$O_s \omega'_s = 3 M_s O_s,$$

d'après un théorème connu. Donc enfin ω_s, ω'_s, O_s sont en ligne droite, et l'on a

$$O_s \omega_s = O_s \omega'_s.$$

Par suite, la sphère tangente à $S \omega_s$ et de centre O est tangente à la perpendiculaire menée en ω'_s à la face ABC , d'où :

Il y a une sphère de centre O tangente aux perpendiculaires à chaque face menées par son point de concours des hauteurs.

Les théorèmes démontrés jusqu'ici [théorèmes que nous avons donnés au mois d'août 1875 à la Section de Mathématiques, à Nantes, au Congrès de l'Association française pour l'avancement des Sciences, les uns sous une forme identique, les autres sous des formes peu différentes (voir le Volume des Communications faites au Congrès)] donnent la solution de la question 1272.

$A'\alpha$ est perpendiculaire sur BC et sur SA ; donc :

Les perpendiculaires communes aux arêtes opposées passent par les milieux de ces arêtes et, par suite, se coupent au centre de gravité.

Il est facile de voir que : *les trois perpendiculaires communes aux arêtes opposées sont rectangulaires deux à deux* et que l'on a

$$\alpha A' = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2},$$

$$\beta B' = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2},$$

$$\gamma C' = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}.$$

Le triangle OSA' , rectangle en A' , donne

$$\overline{OS}^2 = \overline{OA'}^2 + \overline{SA'}^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}.$$

C'est le carré du rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre.

Appelons R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC; on a

$$\overline{OO_s}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{O_sA}^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8} - R^2.$$

C'est le carré du rayon de la sphère inscrite au tétraèdre.

Puisque O est aussi le centre de gravité du tétraèdre, la hauteur $S\omega_s = 4OO_s$; donc, en appelant P la surface du triangle ABC, on a

$$\overline{S\omega_s}^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{a^2 b^2 c^2}{P^2},$$

et l'on peut mettre le second membre sous la forme

$$\frac{(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{8P^2}.$$

Le triangle rectangle OO_sM_s donne

$$\overline{O_sM_s}^2 = \overline{OM_s}^2 - \overline{OO_s}^2.$$

Mais

$$OM_s = \frac{1}{3} OS;$$

donc

$$\overline{O_sM}^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Comme O_sM_s est le tiers de $O_s\omega'_s$, on a ce théorème :

Dans un triangle ABC, le carré de la distance du centre du cercle circonscrit au point de concours des hauteurs est égal à neuf fois le carré du rayon du cercle circonscrit, moins la somme des carrés des trois côtés.

J'avais donné ce théorème dans les *Nouvelles Annales* il y a quelques années : j'ai vu depuis qu'il y avait déjà été démontré par M. Brassine.