NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. TISSOT

Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 532-548

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__532_0>

MÉMOIRE

SUR LA REPRÉSENTATION DES SURFACES ET LES PROJECTIONS DES CARTES GÉOGRAPHIQUES ;

PAR M. A. TISSOT.

[SUITE (*)].

CHAPITRE III.

Valeurs numériques des éléments qui permettent d'apprécier les déformations produites par les divers modes de projection dans la construction des Mappemondes.

Préliminaires.

68. Parmi les angles qui ont leur sommet en un point quelconque du globe, et leurs côtés tangents à sa surface, celui que la représentation altère le plus se trouve remplacé sur la carte par son supplément (n° 12); ce ne peut donc être l'angle du méridien et du parallèle. Ces deux lignes ne sont pas non plus celles dont les directions correspondent aux valeurs extrêmes du rapport de longueurs, à moins que, sur la carte, elles ne se trouvent perpendiculaires entre elles (n° 18). Ainsi, pour se rendre compte de la déformation produite autour d'un point donné, il ne suffit pas de calculer les trois altérations relatives au méridien et au parallèle de ce point; mais il faut en déduire les demi-axes de l'ellipse indicatrice, qui ne sont autre chose que le *maximum* et le *minimum* du rapport de longueurs (n° 14), et dont le

(*) *Nouv. Ann.*, 2e série, t. XVIII, p. 385.

produit donne le rapport des surfaces (n° 18). En divisant leur différence par leur somme, on obtient le sinus de la plus grande altération qu'éprouvent les angles comptés à partir de l'une des tangentes principales (n° 7); enfin, le double de cette altération fait connaître la plus grande altération d'angle (n° 12).

Soient l la latitude et m la longitude d'un point de la surface terrestre. Il est permis de faire abstraction de l'aplatissement dans la recherche des altérations produites autour de ce point, car cela revient à négliger une très-petite fraction de la valeur de chacune d'elles; on peut donc prendre respectivement, pour longueurs des arcs infiniment petits de méridien et de parallèle qui partent du point considéré, dl et $\cos l\,dm$. Le plus souvent, les longueurs correspondantes de la carte se déduiront immédiatement de la définition du système de projection ou de quelqu'une de ses propriétés; en tout cas, elles seront fournies par les formules du n° 20. Le coefficient de dl dans l'une, et, dans l'autre, le produit du coefficient de dm par séc l feront connaître les rapports de longueur, h et k, sur le méridien et sur le parallèle. On calculera ensuite l'altération θ éprouvée par l'angle de ces deux lignes.

Dans l'ellipse indicatrice, h et k sont deux demi-diamètres conjugués inclinés l'un sur l'autre de $\frac{\pi}{2} - \theta$; il sera donc facile de déterminer les demi-axes, a et b, de cette ellipse, puis le *maximum*, ω, de l'altération éprouvée par l'angle que fait, avec la direction de l'un d'eux, une autre direction variable, enfin le rapport S des éléments superficiels. Par exemple, si l'on pose

$$\tan \lambda = \frac{k}{h}, \quad \sin 2\gamma = \cos\theta \sin 2\lambda,$$

on pourra faire usage des formules

$$\sin\omega = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \gamma\right), \quad S = hk\cos\theta,$$

$$a = \sqrt{S\cot\gamma}, \quad b = \sqrt{S\operatorname{tang}\gamma}.$$

En général, nous avons choisi l'échelle de manière qu'au centre de la carte S soit égal à l'unité.

Nous appellerons *autogonales* les projections qui conservent les angles, et *authaliques* celles qui conservent les aires. Dans les projections autogonales, on a

$$\theta = 0, \quad \omega = 0, \quad h = k = a = b, \quad S = a^2,$$

et, dans les projections authaliques,

$$a = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}\right), \quad b = \cot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}\right), \quad S = 1;$$

lorsque, dans ces dernières, les longueurs sont aussi conservées le long des parallèles, on a de plus

$$h = \operatorname{séc}\theta, \quad k = 1, \quad \operatorname{tang}\omega = \frac{1}{2}\operatorname{tang}\theta.$$

69. Les éléments qui figurent dans nos Tableaux sont principalement 2ω, a, b et S; dans certains cas où les trois derniers se trouvent avoir des valeurs inférieures à l'unité, nous donnons aussi celles de leurs inverses α, β, Σ, et quelquefois celles de $a\beta$, c'est-à-dire du rapport de a à b. Ces éléments suffisent toujours pour l'étude de la déformation produite autour de chaque point, mais non pour la comparaison des longueurs en des points différents de la carte : quand la plus petite des valeurs de b est égale à un, il est naturel de considérer l'arc infiniment petit auquel elle correspond comme reproduit en vraie grandeur, et les divers *maxima* de l'al-

tération de l'unité de longueur comme représentés par les valeurs de $a - 1$; dans le cas contraire, pour que l'interprétation ne cesse pas d'être exacte, il faut substituer aux valeurs de a les quotients de leur division par la plus petite valeur de b; une remarque analogue s'appliquerait à la comparaison des éléments de surface; c'est pourquoi, dans les Tableaux relatifs à certains modes de projection, on trouvera des colonnes intitulées (a) et (S) contenant respectivement les rapports des valeurs de a et de S aux plus petites valeurs que b et S sont susceptibles de prendre dans toute l'étendue de la carte.

Les nombres que nous avons calculés se rapportent en général aux points d'intersection des parallèles de 15 en 15 degrés de latitude avec les méridiens de 15 en 15 degrés de longitude, le premier méridien étant celui dont la projection sépare la carte en deux portions symétriques.

70. Parmi les projections que nous considérerons, il y en a six dans lesquelles les parallèles sont représentées par des droites de même direction, les méridiens par d'autres droites perpendiculaires aux premières et ayant entre elles des distances proportionnelles aux différences de longitude; ce sont : la projection de Mercator, le développement cylindrique, la projection des cartes plates carrées, celle des cartes plates parallélogrammatiques et deux projections du P. Braun. Les altérations y sont indépendantes des longitudes, et, pour obtenir toutes celles qui se rapportent à la représentation du globe entier, il suffit de faire varier les latitudes de zéro à 90 degrés.

Beaucoup d'autres systèmes se prêtent aussi à la représentation complète de la Terre sur une seule carte, ou à celle d'une portion plus grande qu'un hémisphère, mais avec des altérations d'autant plus fortes que cette portion est plus considérable; pour chacun d'eux nous avons calculé les altérations produites dans la représentation d'un hémisphère seulement. Lorsque cet hémisphère est limité par un méridien, il arrive presque toujours que l'équateur de la carte est rectiligne et joue le rôle d'axe de symétrie, de sorte qu'il suffit de considérer le quart de la carte, et de faire varier les latitudes ainsi que les longitudes, de zéro à 90 degrés.

Dans une projection centrale effectuée sur le plan de l'équateur ou sous l'aspect polaire, les parallèles de la carte sont des circonférences concentriques, les méridiens sont des droites partant du centre et faisant entre elles des angles égaux à ceux des méridiens du globe; les altérations ne dépendent que de la latitude ou de la distance polaire δ qui en est le complément. Dans la projection centrale de même nature effectuée sur l'horizon d'un lieu donné, ce sont les petits cercles perpendiculaires à la verticale de ce lieu et les grands cercles contenant cette verticale qui se trouvent représentés par des circonférences concentriques et des droites concourantes; les altérations sont les mêmes que dans la projection polaire ou équatoriale, seulement elles se rapportent à des points différents; elles seront fournies par les mêmes Tables, pourvu que dans celles-ci on regarde δ comme désignant toujours la distance angulaire d'un lieu quelconque à celui qui correspond au centre de la carte. Néanmoins, afin d'avoir des termes de comparaison entre les projections centrales effectuées sur un méridien et les autres projections méridiennes, nous avons déterminé, pour quelques-unes des premières, les valeurs des éléments a, b, ..., de 15 en 15 degrés de longitude et de 15 en 15 degrés de latitude. La première ligne horizontale et la première colonne verticale des Tables qui contiennent ces valeurs reproduisent les nombres relatifs à la projection équatoriale. Pour quatre des projections centrales polaires, nous avons considéré tous les points dont la colatitude δ est multiple de 5 degrés.

Dans les perspectives que nous aurons à étudier, le plan du Tableau est perpendiculaire au diamètre mené par le point de vue; ce sont donc des projections centrales. Ce plan est d'ailleurs parallèle à celui du grand cercle qui limite l'hémisphère à représenter; nous le supposerons tangent à cet hémisphère, afin de nous conformer à la convention qui a été faite sur le choix de l'échelle.

Pour étudier les diverses projections au point de vue de la déformation qu'elles produisent, il est naturel de les diviser en trois classes comprenant respectivement les projections autogonales, les projections authaliques, enfin celles qui ne conservent ni les angles ni les surfaces, et que nous appellerons projections *aphylactiques*.

Projections autogonales ($\omega = 0$, $b = a$).

71. *Projection de Mercator ou des cartes marines dites cartes réduites* [Tableau I (*)]. — Les méridiens et les parallèles de la carte sont des droites formant un canevas rectangulaire. L'équateur est développé en vraie grandeur. La condition que les angles soient conservés détermine la distance d'un parallèle de la carte à l'équateur en fonction de la colatitude δ; quand on suppose

(*) Les cent quatre-vingt-seize Tableaux numeriques auxquels nous renverrons successivement ont ete reportes à la fin du Memoire, dont ils occupent les soixante dernières pages; ils se trouvent répartis en cinquante-deux groupes designés par des numéros ecrits en chiffres romains.

la Terre sphérique, cette distance est égale au logarithme népérien de $\tang\frac{\delta}{2}$.

72. *Projection cylindrique autogonale de Lambert* (Tableaux II). — Les coordonnées rectangulaires des divers points de la Carte sont données par les formules

$$x = \frac{1}{2}\log\frac{1+\cos l\sin m}{1-\cos l\sin m},\qquad \tang y = \tang l\,\text{séc}\,m,$$

les logarithmes étant ceux du système népérien. On peut déduire cette projection de celle de Mercator en attribuant à l'un des méridiens le rôle que joue l'équateur dans cette dernière.

73. *Projection stéréographique équatoriale* (Tableau III). — C'est la perspective de l'un des deux hémisphères limités par l'équateur sur le plan tangent en celui des deux pôles que contient cet hémisphère, le point de vue étant placé à l'autre pôle.

74. *Projection stéréographique méridienne* (Tableaux IV). — C'est la perspective d'un hémisphère limité par un méridien, le plan du Tableau étant tangent à cet hémisphère et parallèle à ce méridien, et le point de vue étant diamétralement opposé au point de contact.

75. *Projections coniques autogonales de Lambert* (Tableaux V). — Les parallèles de la carte sont des circonférences concentriques, les méridiens des droites partant du centre commun et faisant entre elles des angles proportionnels à ceux des méridiens du globe. Le rapport constant des premiers angles aux autres, que nous appellerons l'*exposant* de la projection, étant désigné par n, et R étant le rayon du cercle qui corres-

pond à l'équateur, le rayon r de celui qui correspond au parallèle de colatitude δ est donné par la formule

$$r = R\left(\tang\frac{\delta}{2}\right)^n.$$

L'hémisphère se trouve représenté par un secteur dont le pôle occupe le centre, et dont l'angle P, exprimé en degrés, est égal à 360 n. Si l'on prenait l'exposant plus grand que l'unité, il y aurait recouvrement. Dans toutes les projections où il est au contraire plus petit que l'unité, a passe par un *minimum* lorsque δ varie de zéro à 90 degrés; pour chacune de ces projections, nous avons choisi la constante arbitraire R de manière que ce *minimum* soit égal à 1; la latitude correspondante a été désignée par l_0 dans le premier des Tableaux V. Ces Tableaux se rapportent à 13 valeurs de n; la première valeur, savoir $n = 0$, donne, avec $nR = 1$, la projection de Mercator; la dernière valeur, savoir $n = 1$, donne la projection stéréographique équatoriale. Partout dans celle-ci, et partout ailleurs qu'au pôle dans les autres, les angles sont conservés. Pour celle dont l'exposant est $\frac{2}{3}$, nous avons calculé de 5 en 5 degrés de latitude les valeurs de a et de S.

76. *Projections autogonales à méridiens circulaires, le centre de la carte correspondant à un point de l'équateur* (Tableaux VI). — Dans un canevas orthogonal, les méridiens ne peuvent être circulaires sans que les parallèles le soient; car, si les méridiens de la carte sont des cercles, la droite qui passe par les projections des pôles servira d'axe radical à deux quelconques d'entre eux, et leurs trajectoires orthogonales seront des cercles ayant leurs centres sur cette droite. Cela ne suffit pas pour que la

projection soit autogonale; il faut de plus que les angles sous lesquels se coupent les méridiens de la carte soient, avec ceux des méridiens correspondants du globe, dans un rapport constant, que nous appellerons l'*exposant* de la projection. Enfin, n étant cet exposant, si l'on désigne par δ' l'angle de la ligne des pôles de la carte avec le rayon de l'un des points où la circonférence décrite sur cette ligne comme diamètre rencontre la projection du parallèle de colatitude δ, on devra avoir

$$\operatorname{tang}\frac{\delta'}{2} = \left(\operatorname{tang}\frac{\delta}{2}\right)^n.$$

Pour $n = 0$, on retombe sur la projection de Mercator, et, pour $n = 1$, sur la projection stéréographique méridienne. Pour $n > 2$, il y aurait recouvrement dans la représentation d'un hémisphère. Aux pôles, par exception, les angles ne sont pas conservés, si ce n'est dans la projection stéréographique. Sur un même parallèle, a et S augmentent avec la longitude. Nous donnons, pour vingt et une de ces projections, l'angle P sous lequel se coupent les demi-méridiens extrêmes, ainsi que les valeurs de a et de S relatives à quatre points particuliers.

77. *Projection de Lagrange* (Tableaux VII). — La projection orthomorphe à méridiens circulaires dans laquelle a et S varient le plus lentement possible, sur le parallèle et sur le méridien, à partir du point central, est celle qui correspond à $n = \sqrt{2}$. L'angle P y est égal à $254^\circ 33' 30''$.

78. *Projection autogonale de Littrow* (Tableaux VIII). — Les parallèles et les méridiens sont représentés respectivement par des ellipses et des hyperboles homofocales. Les coordonnées rectangulaires d'un point quel-

conque de la carte sont

$$x = \operatorname{tang} l \cos m, \quad y = \operatorname{séc} l \sin m.$$

Sur un même parallèle, a et S diminuent à mesure que m augmente; sur un même méridien, ils augmentent en même temps que l. Nous donnerons seulement les valeurs qu'ils prennent sur l'équateur, sur le premier et le dernier méridien.

Projections authaliques ($\beta = a$, $S = 1$).

79. *Développement cylindrique* (Tableau IX). — On développe le cylindre circonscrit le long de l'équateur. Les méridiens et les parallèles de la carte sont les transformées des génératrices et des sections droites que tracent, sur le cylindre, les plans des méridiens et ceux des parallèles du globe. Le canevas est donc orthogonal et formé par deux systèmes de droites.

80. *Développement cylindrique transverse.* — On projette orthogonalement chaque point du globe sur la surface d'un cylindre qui est circonscrit le long d'un méridien, et que l'on développe ensuite.

Nulles sur ce méridien, les altérations sont les mêmes en tous les points de chacun des petits cercles qui ont leurs plans parallèles au sien. Elles sont fournies par le Tableau relatif au développement cylindrique ordinaire, pourvu que, dans ce Tableau, on considère l'argument l comme représentant la distance sphérique du petit cercle au méridien de contact. Le même Tableau donne les valeurs des éléments 2ω, a, b, ..., pour les divers points de l'équateur, lorsqu'on y considère l comme représentant la longitude. Enfin, si l'on y remplace l par $90^\circ - l$, il fera connaître les valeurs des éléments pour les divers points du méridien qui est perpendiculaire au premier.

81. *Projections cylindriques authaliques.* — Les méridiens sont représentés par des droites parallèles entre elles, les parallèles par d'autres droites perpendiculaires aux premières. La distance des projections de deux méridiens est dans un rapport constant, n, avec l'arc d'équateur intercepté par ces deux méridiens; la distance des projections de deux parallèles est dans le rapport inverse, $\frac{1}{n}$, avec celle des plans des deux parallèles.

Pour $n = 1$, on retombe sur le développement cylindrique. Quel que soit n, on a aux pôles $2\omega = 180°$, $a = \infty$, $b = 0$. Nous reviendrons sur ces projections dans le Chapitre IV.

82. *Projection centrale authalique équatoriale de Lambert,* dite *projection de Lorgna* (Tableau X). — Les méridiens sont représentés par des droites concourantes faisant entre elles des angles égaux aux différences de longitudes, les parallèles par des circonférences concentriques ayant pour rayons les distances rectilignes du pôle aux parallèles du globe.

83. *Projection centrale authalique de Lambert* (Tableaux XI). — Les grands cercles qui contiennent la verticale d'un lieu de l'équateur et les petits cercles perpendiculaires à cette ligne remplacent respectivement les méridiens et les parallèles de la projection équatoriale. Quant aux méridiens et aux parallèles de la nouvelle projection, ce sont des courbes du quatrième degré.

84. *Projections coniques authaliques de Lambert.* — Les méridiens de la carte sont des droites concou-

rantes faisant entre elles des angles proportionnels aux différences de longitudes, et les parallèles, des circonférences ayant toutes pour centre le point de concours des méridiens. Le rapport constant de l'angle de deux méridiens de la carte à celui des méridiens correspondants du globe étant désigné par n, le rayon de chaque parallèle de la carte est, avec la corde qui va du pôle au parallèle correspondant du globe, dans le rapport de 1 à $\sqrt{n}$.

En faisant $n = 1$, on retrouve la projection du n° 15; en faisant $n = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on obtient celle du numéro suivant. C'est seulement dans le Chapitre IV que nous aurons à considérer d'autres valeurs de n.

85. *Projection conique authalique périgonale* (Tableau XII). — Nous avons trouvé que, pour rendre aussi faible que possible la plus grande altération d'angle, et par conséquent aussi la plus grande altération de longueur, sur la carte d'un hémisphère dressée d'après le système des projections coniques authaliques, il fallait prendre n égal à $\frac{1}{\sqrt{2}}$. La carte, au lieu d'un cercle entier, forme alors un secteur de $254°33'30''$. Les altérations sont nulles le long du parallèle qui a pour colatitude $65°32'11''$.

86. *Projections tronconiques authaliques* ou *projections d'Albers*. — Elles ne diffèrent des projections coniques authaliques que par l'expression du rayon du parallèle de la carte en fonction de la colatitude. Cette expression est ici

$$r = \sqrt{\frac{2}{n}(C - \cos\delta)},$$

C désignant un nouveau paramètre arbitraire.

En prenant $C = 1$, on retrouve les projections coniques. Pour toute autre valeur de C, le pôle se trouve remplacé par un arc de cercle de grandeur finie, de sorte qu'il n'y a pas lieu de faire usage de ces projections dans la représentation d'un hémisphère.

87. *Projection authalique de Mollweide*, dite *projection homalographique de Babinet* (Tableaux XIII). — Les méridiens de la carte sont des ellipses ayant toutes pour axe la droite qui joint les deux pôles; les autres axes sont proportionnels aux longitudes; l'un deux, celui de la demi-ellipse qui correspond à la longitude de 90 degrés, est égal au premier axe. Les parallèles sont représentés par des droites perpendiculaires à celle qui joint les deux pôles; l'équation

$$2l' + \sin 2l' = \pi \sin l$$

détermine l'angle au centre l' qui correspond à l'arc intercepté entre la projection de l'équateur et celle du parallèle de latitude l sur le méridien circulaire de la carte.

Outre les Tableaux habituels, nous donnons ici celui des rapports de longueurs sur les parallèles, ainsi que de leurs inverses, lesquels sont indépendants des longitudes. Nous donnons aussi les éléments de la déformation sur le parallèle de 89 degrés de latitude, enfin les valeurs de 2ω et de a, de 10 degrés en 10 degrés, sur le méridien qui limite l'hémisphère.

88. *Projection sinusoïdale de Nicolas Sanson*, dite *projection de Flamsteed* (Tableaux XIV). — Le premier méridien est développé en vraie grandeur suivant une droite, les parallèles suivant d'autres droites perpendiculaires à la première, et sur lesquelles on porte, pour construire par points les projections des méridiens, des

longueurs égales aux arcs de parallèles; ces projections sont des sinusoïdes.

Nous rencontrons ici un premier exemple des systèmes de représentation dans lesquels chacun des éléments ω, a, b prend, au pôle, des valeurs différentes suivant que l'on regarde ce point comme appartenant à un méridien ou à un autre. La condition de continuité, que suppose la loi de déformation établie dans le premier Chapitre, ne se trouve pas remplie au pôle par la projection sinusoïdale, puisque les deux moitiés d'un même méridien n'y ont pas la même tangente; de là vient que, sur les divers méridiens, a, par exemple, ne tend pas vers la même limite quand l s'approche indéfiniment de 90°.

89. *Projections sinusoïdales authaliques.* — Le méridien moyen de la carte est une droite, les parallèles d'autres droites perpendiculaires à la première et interceptant sur celle-ci des longueurs proportionnelles aux différences de latitudes. Pour tracer les méridiens par points, on porte, sur les parallèles de la carte, des longueurs proportionnelles aux arcs des parallèles du globe. Le rapport constant n de la distance de deux parallèles de la carte à la différence de leurs latitudes, et celui de la longueur d'une portion de parallèle de la carte à l'arc correspondant du globe, sont inverses l'un de l'autre.

La projection de Sanson correspond à $n = 1$; la suivante à

$$n = \sqrt[4]{1 + \frac{\pi^2}{4}} = 1,3646\ldots$$

90. *Projection sinusoïdale authalique périgonale* (Tableau XV). — La valeur précédente de n est celle que nous avons obtenue en cherchant la projection sinusoïdale authalique qui rend aussi faible que possible la

plus grande valeur de chaque altération sur une carte de la moitié du globe terrestre.

Les altérations sont les mêmes tout le long de l'équateur et tout le long du méridien moyen; elles correspondent par conséquent aux nombres de la première ligne du Tableau, lequel se rapporte au méridien extrême, qui est celui sur lequel il y a le plus de déformation.

91. *Projection dite de Bonne ou du Dépôt de la Guerre* ou *de la Carte de France* (Tableau XVI). — Le premier méridien, ou méridien moyen, est développé en vraie grandeur suivant une droite, et les parallèles suivant des circonférences ayant leurs centres en un même point de cette droite; pour l'un d'entre eux, dit *parallèle moyen,* le rayon est égal à la génératrice du cône circonscrit au globe terrestre le long de ce parallèle. Sur les parallèles de la carte, on prend, à partir du méridien rectiligne, des arcs égaux à ceux des parallèles du globe; les extrémités de ces arcs déterminent les projections des autres méridiens.

Il ne se produit aucune altération sur le méridien moyen ni sur le parallèle moyen. Sur les autres parallèles, les altérations augmentent avec la longitude; aux pôles elles sont indépendantes du choix que l'on peut faire du parallèle moyen; nous donnons les valeurs qui se rapportent à ces points, sur les deux méridiens extrêmes, pour la carte d'un hémisphère et pour celle du globe entier. Ces valeurs correspondent aux plus grandes altérations lorsqu'on prend l'équateur pour parallèle moyen; alors on retombe sur la projection sinusoïdale de Nicolas Sanson. Avec tout autre parallèle moyen, on aura des altérations plus fortes. Par exemple, avec le parallèle moyen de 45 degrés de latitude nord, les maxima ont lieu sur le parallèle de

$69^\circ 25' 10''$ de latitude sud, et l'on a, à l'intersection de ce parallèle avec le méridien de 90° de longitude,

$$\theta = 58^\circ 51', \quad 2\omega = 79^\circ 12',$$
$$a = 2,125, \quad b = 0,471, \quad a\beta = 4,517.$$

Le parallèle moyen étant encore celui de 45 degrés, on aurait, sur l'équateur et sur les méridiens extrêmes, dans la représentation de l'un des deux hémisphères limités par l'équateur,

$$\theta = 60^\circ 23', \quad 2\omega = 82^\circ 41',$$
$$a = 2,212, \quad b = 0,452, \quad a\beta = 4,892.$$

92. *Projection à méridiens et parallèles rectilignes de M. Collignon* (Tableaux XVII). — Les coordonnées rectangulaires de la projection du point de longitude m et de colatitude δ sont données par les formules

$$x = \sqrt{\pi}\left(1 - \sqrt{2}\sin\frac{\delta}{2}\right), \quad y = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, m \sin\frac{\delta}{2}.$$

Les demi-méridiens qui limitent la carte d'un hémisphère dessinent un carré, dont le premier méridien et l'équateur sont les diagonales. C'est à ces diverses lignes que se rapportent les nombres des Tableaux XVII.

93. *Projection dite stéréographique équivalente de M. de Prépetit-Foucaut* (Tableaux XVIII). — La projection du point du globe dont la latitude est l et la longitude m a pour coordonnées rectangulaires

$$x = \sqrt{\pi}\,\text{tang}\,\frac{l}{2}, \quad y = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, m \cos l \cos^2\frac{l}{2}.$$

Les parallèles de la carte sont rectilignes. Les altérations sont les mêmes pour tous les points de l'équateur.

94. ***Projection authalique de Werner*** (Tableau XIX). — Les parallèles de la carte sont des circonférences concentriques ayant pour rayons les distances sphériques de l'un des pôles aux parallèles du globe. Sur ces circonférences, on prend, à partir du premier méridien, qui est rectiligne, des arcs égaux à ceux des parallèles terrestres, ce qui détermine les autres méridiens.

Nulles tout le long du méridien moyen, les altérations croissent avec la longitude. Sur chaque méridien, elles augmentent, à partir du pôle dont la projection sert de centre aux projections des parallèles, jusqu'au point de l'autre hémisphère qui a pour latitude $67^\circ 12' 10''$. Ainsi, dans la carte de l'un des deux hémisphères limités par l'équateur, elles atteindraient leurs plus grandes valeurs à l'intersection de cette ligne avec le méridien de 180 degrés de longitude. On a, en ce point,

$$2\omega = 90^\circ, \quad a = 2{,}414, \quad b = 0{,}414, \quad a\beta = 5{,}828.$$

Sur la carte d'un hémisphère limité par un méridien, la projection du pôle nord servant de centre aux projections des parallèles, les *maxima* ont lieu pour

$$l = -67^\circ 12' 10'', \quad m = 90^\circ.$$

(*A suivre.*)