

H. LEMONNIER

Calcul d'un déterminant

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 18
(1879), p. 518-524

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__518_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1879, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CALCUL D'UN DETERMINANT ;

PAR M. H. LEMONNIER.

Calcul du déterminant

$$N = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 2 & . & \dots & n & 1 \\ \dots & . & \dots & \dots & \dots \\ n-1 & n & \dots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & \dots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

Premier procédé :

$$\begin{aligned} N &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & 1 \\ 2 & 1 & \dots & \dots & 1 & 1-n \\ 3 & 1 & \dots & \dots & 1-n & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-1 & 1 & 1-n & \dots & 1 & 1 \\ n & 1-n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & . & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & . & \dots & 0 & 0 & -n \\ 1 & 0 & 0 & . & \dots & 0 & -n & n \\ 1 & 0 & 0 & . & \dots & -n & n & 0 \\ . & \dots & \dots & . & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & -n & n & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -n & n & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & -n & 2n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & -n & 2n & -n \\ . & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & -n & 2n & -n & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -n & 2n & -n & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -n \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & -n & 2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -n & 2n & -n & \dots & \dots & 0 \\ -n & 2n & -n & \dots & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix} \\
&- \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -n \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & -n & 2n \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & -n & 2n & -n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -n & 2n & -n & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2n & -n & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

l'ordre des déterminants s'abaissant d'une unité.

Le premier de ces derniers déterminants est

$$n^{n-1}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Le second est

$$\begin{aligned}
&n^{n-2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & 2 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & -1 & 2 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -1 & 2 & -1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= n^{n-2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & 3 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & -1 & 2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 2 & -1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -1 & 2 & -1 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= n^{n-2} \begin{vmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & 3 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -1 & 2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 2 & -1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 2 & -1 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

l'ordre devenant $n-2$.

(520)

$$= n^{n-2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 2 & 6 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & 2 & -1 & -2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= n^{n-2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & -1 & 6 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 2 & -2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} (-1)^{n-3},$$

l'ordre devenant $n - 3$.

$$= n^{n-2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & -1 & 10 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 2 & -5 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} (-1)^{n-3+n-4},$$

déterminant d'ordre $n - 4$.

$$= n^{n-2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & -1 & 15 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 2 & -9 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} (-1)^{n-3+n-4+n-5},$$

d'ordre $n - 5$.

$$= \dots \dots \dots$$

$$= n^{n-2} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \frac{n(n-1)}{2} \end{vmatrix} (-1)^{n-2+\dots+2}$$

$$\begin{aligned}
 & \quad \quad \quad (521) \\
 &= -n^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} (-1)^{\frac{(n-1)(n-4)}{2}} \\
 &= -n^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}};
 \end{aligned}$$

par conséquent,

$$\begin{aligned}
 N &= n^{n-1} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} + n^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \\
 &= n^{n-2} \frac{n(n+1)}{2} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.
 \end{aligned}$$

Il se présente là deux suites de nombres qui sont

$$\begin{aligned}
 &0, \quad 1, \quad 2.1+1=3, \quad 2.3+0=6, \\
 &2.6-2=10, \quad 2.10-5=15, \quad 2.15-9=21, \dots; \\
 &(-1)1+1=0, \quad (-1)3+1=-2, \quad (-1)6+1=-5, \\
 &(-1)10+1=-9, \quad (-1)15+1=-14, \dots;
 \end{aligned}$$

ceux de la première et de la deuxième ligne ont pour expression générale $\frac{n(n-1)}{2}$ pour $n=1, 2, 3, \dots$; ceux de la troisième et de la quatrième ligne $-\frac{n(n-3)}{2}$, et l'on a bien

$$\frac{n(n-1)}{2} - \frac{n(n-3)}{2} = \frac{(n+1)n}{2}$$

et

$$(-1) \frac{n(n-1)}{2} + 1 = -\frac{(n+1)(n-2)}{2}.$$

Deuxième procédé plus simple :

$$N = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & 1 \\ 2 & 3 & . & \dots & n & 1 \\ \dots & . & . & \dots & \dots & . \\ n-1 & n & . & \dots & n-3 & 1 \\ n & 1 & . & \dots & n-2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & & & & 1 & 1 \\ & 2 & 1 & & & 1 & 1 \\ 3 & & 1 & . & & 1-n & 1 \\ & . & . & & . & . & . \\ n-1 & 1 & 1-n & & & 1 & 1 \\ n & 1-n & 1 & . & & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & & & & 1 & 1 \\ 1 & 0 & & & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & & . & -n & 0 \\ 1 & 0 & & . & . & -n & n & 0 \\ & & & & & . & . & . \\ 1 & 0 & -n & n & & . & 0 & 0 \\ 1 & -n & n & -n & & & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} n^{n-2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & & & & . & 1 & 1 \\ 1 & 0 & & & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & & & -1 & 0 \\ 0 & 0 & . & & & & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & & . & . & & -1 & 2 & -1 & 0 \\ & & & . & \dots & . & & & & . \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & & & & & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & & & & & . & 0 \end{vmatrix},$$

$$= - \frac{n(n+1)}{2} n^{n-2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & & & & . & 1 & 1 \\ 0 & 0 & & & & . & -1 & 0 \\ 0 & 0 & & & & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & & & . & -1 & 2 & -1 & 0 \\ & & & . & . & . & & & . \\ 0 & -1 & 2 & -1 & . & & . & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & & & & 0 \end{vmatrix}$$

d'ordre $n-1$

$$= \frac{n(n+1)}{2} n^{n-2} (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & & & & & -1 \\ 0 & 0 & & & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & & & . & . & & . \\ 0 & -1 & 2 & -1 & & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & & & 0 \end{vmatrix},$$

d'ordre $n-2$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n(n+1)}{2} n^{n-2} (-1)^{n-1+n-2+1+2} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} n^{n-2} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.
\end{aligned}$$

On trouve de même que

$$\begin{aligned}
V_{p+1} &= \begin{vmatrix} p+1 & & p+n \\ . & \ddots & . \\ p+n & & p+n-1 \end{vmatrix} \\
&= \left[np + \frac{n(n+1)}{2} \right] \begin{vmatrix} p+1 & \dots & p+n-1 & 1 \\ . & \ddots & . & . \\ p+n & & p+n-1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \left[np + \frac{n(n+1)}{2} \right] \begin{vmatrix} p+1 & 1 & 1 & . & 1 & 1 \\ p+2 & 1 & 1 & . & 1 & 1 \\ . & . & . & . & 1-n & 1 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ p+n-1 & 1 & 1-n & . & 1 & 1 \\ p+n & 1-n & 1 & . & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \left[np + \frac{n(n+1)}{2} \right] \begin{vmatrix} p+1 & 1 & \dots & & 1 & 1 \\ 1 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 1 & 0 & . & . & -n & 0 \\ 1 & 0 & . & -n & n & 0 \\ & & & . & . & . \\ 1 & 0 & -n & n & . & . & 0 \\ 1 & -n & n & 0 & & & 0 \end{vmatrix} \\
&= \left[np + \frac{n(n+1)}{2} \right] \begin{vmatrix} p+1 & 1 & & & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & -n & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & -n & n & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & -n & n & -n & 0 \\ & & & & . & . & . & . & . \\ 0 & -n & n & -n & & . & . & 0 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$= - \left[np + \frac{n(n+1)}{2} \right] n^{n-2} \begin{vmatrix} 1 & . & \dots & \dots & \dots & 1 & 1 \\ 0 & . & \dots & \dots & \dots & -1 & 0 \\ 0 & . & \dots & \dots & -1 & 2 & 0 \\ \dots & . & \dots & \dots & \dots & \dots & . \\ -1 & 2 & -1 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix},$$

d'ordre $n-1$.

$$= \left[np + \frac{n(n+1)}{2} \right] n^{n-2} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Le déterminant est nul seulement au cas de $p = -\frac{n+1}{2}$, alors que la somme des termes dans une ligne ou une colonne est nulle.

La valeur pour $p = -1$ est à remarquer.

Si l'on multiplie tous les éléments par q , le déterminant est multiplié par q^n ; qu'on change ensuite pq en p , on obtient

$$\begin{vmatrix} p+q & p+2q & \dots & p+nq \\ p+2q & p+3q & \dots & p+q \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p+nq & p+q & \dots & p+(n-1)q \end{vmatrix} \\ = q^n \left[n \frac{p}{q} + \frac{n(n+1)}{2} \right] n^{n-2} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \\ = q^{n-1} \left(p + \frac{n+1}{2} q \right) n^{n-1} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$