

GEORGES DOSTOR

Méthode directe pour calculer la somme des puissances α des n premiers nombres entiers

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 18 (1879), p. 513-518

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__513_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1879, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**MÉTHODE DIRECTE POUR CALCULER LA SOMME
DES PUISSANCES α DES n PREMIERS NOMBRES ENTIERS;**

PAR M. GEORGES DOSTOR.

[SUITE (*)].

*Sommes des dix premières puissances des n premiers
nombres entiers.*

4. Nous avons appliqué la méthode exposée page 459 à la sommation des puissances semblables des n premiers nombres entiers, depuis la première jusqu'à la dixième inclusivement. Nous avons trouvé les formules suivantes :

$$\Sigma n = \frac{1}{2} n(n+1),$$

$$\Sigma n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1),$$

$$\Sigma n^3 = \frac{1}{4} n^2(n+1)^2,$$

(*) *Nouv. Ann.*, 2^e série, t. XVIII, p. 459.

$$\Sigma n^4 = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1),$$

$$\Sigma n^5 = \frac{1}{12} n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1),$$

$$\Sigma n^6 = \frac{1}{42} n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1),$$

$$\Sigma n^7 = \frac{1}{24} n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2),$$

$$\Sigma n^8 = \frac{1}{90} n(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3),$$

$$\Sigma n^9 = \frac{1}{20} n^2(n+1)^2(2n^6+6n^5+n^4-8n^3+n^2+6n-3),$$

$$\Sigma n^{10} = \frac{1}{66} n(n+1)(2n+1) \\ \times (3n^8+12n^7+8n^6-18n^5-10n^4+24n^3+2n^2-15n+5).$$

La comparaison de ces formules conduit à des résultats qui méritent d'être signalés.

5. Nous obtenons d'abord les six égalités

$$(I) \quad \Sigma n^2 + \Sigma n = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2),$$

$$(II) \quad \Sigma n^2 - \Sigma n = \frac{1}{3} (n-1)n(n+1),$$

$$\Sigma n^3 + \Sigma n = \frac{1}{4} n(n+1)(n^2+n+2),$$

$$(III) \quad \Sigma n^3 - \Sigma n = \frac{1}{4} (n-1)n(n+1)(n+2),$$

$$\Sigma n^3 + \Sigma n^2 = \frac{1}{12} n(n+1)(n+2)(3n+1),$$

$$\Sigma n^3 - \Sigma n^2 = \frac{1}{12} (n-1)n(n+1)(3n+2).$$

Nous voyons par les formules (I), (II) et (III) que :
1° La somme des carrés des n premiers nombres en-

tiers, ajoutée à la somme de ces n mêmes nombres, est égale au tiers du produit de trois nombres entiers consécutifs, dont le premier est n .

2° *La somme des carrés des n premiers nombres entiers, diminuée de la somme de ces n mêmes nombres, est égale au tiers du produit de trois nombres entiers consécutifs, dont le premier est $n - 1$.*

3° *La somme des cubes des n premiers nombres entiers, diminuée de la somme de ces n mêmes nombres, est égale au quart du produit de quatre nombres entiers consécutifs, dont le premier est $n - 1$.*

6. Nous trouvons ensuite que

$$\Sigma n^4 - \Sigma n = \frac{1}{30} (n-1)n(n+1)(6n^2+15n+16),$$

$$(IV) \quad \Sigma n^4 - \Sigma n^2 = \frac{1}{10} (n-1)n(n+1)(n+2)(2n+1),$$

$$\Sigma n^4 - \Sigma n^3 = \frac{1}{60} (n-1)n(n+1)(12n^2+15n+2).$$

Nous concluons de l'égalité (IV) que :

La somme des quatrièmes puissances des n premiers nombres entiers, diminuée de la somme des carrés de ces n mêmes nombres, est égale au produit de $2n+1$ par le dixième du produit de quatre nombres entiers consécutifs, dont le premier est $n - 1$.

7. Si nous divisons (IV) par (III), nous aurons

$$(V) \quad \frac{\Sigma n^4 - \Sigma n^2}{\Sigma n^3 - \Sigma n} = \frac{2}{5} (2n+1).$$

Donc, si n est égal à un multiple de 5 plus 2, la différence entre la somme des quatrièmes puissances des n premiers nombres entiers et la somme des carrés de

ces n mêmes nombres est divisible par la différence entre la somme des cubes des n premiers nombres entiers et la somme de ces n mêmes nombres.

8. Il nous vient encore

$$(VI) \quad \Sigma n^4 = \left[\Sigma n + \frac{(n-1)(n+2)}{10} \right] \Sigma n^2,$$

$$(VII) \quad \Sigma n^5 = \left[\Sigma n + \frac{(n-1)(n+2)}{6} \right] \Sigma n^3.$$

Mais le produit $(n-1)(n+2)$ est toujours divisible par 2; donc :

1° *Si n égale un multiple de 5 plus 1 ou un multiple de 5 plus 3, la somme des quatrième's puissances des n premiers nombres entiers est divisible par la somme des carrés de ces n mêmes nombres.*

2° *Si n égale un multiple de 3 plus 1, la somme des cinquièmes puissances des n premiers nombres entiers est divisible par la somme des cubes de ces n mêmes nombres.*

9. Comme on a

$$(VIII) \quad \Sigma n^5 - \Sigma n^3 = \frac{1}{6}(n-1)n^2(n+1)^2(n+2),$$

on voit, au moyen de (III), que

$$(IX) \quad \frac{\Sigma n^5 - \Sigma n^3}{\Sigma n^3 - \Sigma n} = \frac{2}{3}n(n+1).$$

Donc, si n est un multiple de 3 ou un multiple de 3 moins 1, la différence entre la somme des cinquièmes puissances des n premiers nombres entiers et la somme des cubes de ces n mêmes nombres est divisible par la différence entre la somme de ces cubes et la somme des n mêmes nombres.

10. Nous avons

$$\frac{\sum n^6}{\sum n^2} = \frac{1}{7} (3n^4 + 6n^3 - 3n + 1).$$

Or, si n est un multiple de 7 plus 1 et égal à $7p + 1$, le facteur $3n^4 + 6n^3 - 3n + 1$ sera divisible par 7, car le reste de la division de

$$3(7p + 1)^4 + 6(7p + 1)^3 - 3(7p + 1) + 1$$

par 7 est le même que celui que l'on obtient en divisant par 7 la somme

$$3 + 6 - 3 + 1 = 7$$

des restes. Donc :

Si n est un multiple de 7 plus 1, la somme des sixièmes puissances des n premiers nombres entiers est divisible par la somme des carrés de ces n mêmes nombres.

11. Puisque

$$\begin{aligned} \sum n^7 &= \frac{1}{24} n^2 (n + 1)^2 (3n^4 + 6n^3 - n^2 + 4n + 2) \\ &= \frac{1}{3} \frac{1}{4} n^2 (n + 1)^2 \left[\frac{3}{2} n^2 (n + 1)^2 - 2n(n + 1) + 1 \right], \end{aligned}$$

il vient

$$\sum n^7 = \frac{1}{3} \sum n^3 (6 \sum n^3 - 4 \sum n + 1).$$

Mais, si n est un multiple de 3 plus 1, $4 \sum n - 1$ sera divisible par 3. Donc :

Si n est un multiple de 3 plus 1, la somme des septièmes puissances des n premiers nombres entiers est divisible par la somme des cubes de ces n mêmes nombres.

12. D'autres relations plus ou moins simples peuvent se déduire de nos formules.

(518)

Nous citerons encore la suivante,

$$(X) \quad 2(\Sigma n^3)^2 = \Sigma n^5 + \Sigma n^7,$$

qui ne manque pas d'intérêt.