

DESBOVES

**Mémoire sur la résolution en nombres entiers
de l'équation $aX^m + bY^m = cZ^n$**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 18
(1879), p. 433-444

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__433_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1879, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MÉMOIRE SUR LA RÉOLUTION EN NOMBRES ENTIERS DE L'ÉQUATION

$$aX^m + bY^m = cZ^n;$$

PAR M. DESBOVES.

[SUITE (*).]

IV. — RÉOLUTION DE L'ÉQUATION $aX^4 + bY^4 = cZ^n$,

n AYANT LES VALEURS 2, 3, 4, ETC.

14. *Identities relatives à la résolution de l'équation*

$$(55) \quad aX^4 + bY^4 = cZ^2.$$

En égalant à zéro les valeurs de U et V données par les formules (27) et en résolvant les deux équations ainsi obtenues par rapport à x et r , on a

$$x = \frac{-yz}{u}, \quad r = \frac{y(2z^2 - yu)}{u^3}.$$

Si l'on substitue ensuite les valeurs précédentes de x et r dans les expressions de X et Y (27), et dans celle de Z (25), on a

$$X = \frac{2y(z^4 - y^2u^2 + 2yzuz^2)}{u^3}, \quad Y = \frac{4yzu(z^2 - yu)}{u^3},$$

$$Z = \frac{4y^2}{u^6} (z^8 + y^4u^4 + 10y^2z^4u^2 - 4y^3z^2u^3 - 12yzuz^6),$$

et, par suite, on obtient l'identité

$$\begin{aligned} (z^4 - y^2u^2 + 2yzuz^2)^4 + z^4yu(yu - 2z^2)[2(z^2 - yu)]^4 \\ = (z^8 + y^4u^4 + 10y^2z^4u^2 - 4y^3z^2u^3 - 12yzuz^6)^2. \end{aligned}$$

(*) *Nouvelles Annales*, 2^e série, t. XVIII, p. 398.

Si maintenant on pose

$$x^2 = x_1, \quad yu = -y_1,$$

et que l'on efface les accents, on a

$$(56) \quad \left\{ \begin{aligned} (y^2 + 2xy - x^2)^4 + yx^2(y + 2x)(2x + 2y)^4 \\ = (x^4 + y^4 + 10x^2y^2 + 4y^3x + 12yx^3)^2. \end{aligned} \right.$$

De l'identité précédente, on peut déduire plusieurs autres. Si d'abord on y remplace y par $y_1 - x$, et qu'après la substitution on change x^2 en x , puis que l'on efface les accents, on a

$$(57) \quad (y^2 - 2x)^4 + x(y^2 - x)(2y)^4 = (y^4 - 4x^2 + 4xy^2)^2.$$

Changeons maintenant dans l'identité (57) x en $-xy$, et il viendra

$$(58) \quad (y + 2x)^4 - xy^2(x + y) \times 2^4 = (y^2 - 4x^2 - 4xy)^2.$$

Enfin, si dans cette dernière identité on pose

$$x = \frac{(x_1 - y_1)^2}{2}, \quad y = 2x_1y_1,$$

puis que l'on efface les accents, on a

$$(59) \quad (x^2 + y^2)^4 - x^2y^2(x^2 - y^2)^2 \times 2^4 = (x^4 + y^4 - 6x^2y^2)^2.$$

Les identités (56), (57), (58) et (59) montrent que l'équation (55) peut être résolue, lorsque, a et c étant égaux à l'unité, b est de l'une des formes $yx^2(y + 2x)$, $y(y + 2x^2)$, $x(y^2 - x)$, $-xy^2(x + y)$, $-x(x + y^2)$, $-x^2y^2(x^2 - y^2)^2$.

La dernière forme se rapporte au cas des nombres congruents par rapport à deux carrés. On voit, en effet, que l'identité (59) se décompose en ces deux autres

$$(60) \quad (x^2 + y^2)^2 + xy(x^2 - y^2) \times 2^2 = (x^2 - y^2 + 2xy)^2,$$

$$(61) \quad (x^2 + y^2)^2 - xy(x^2 - y^2) \times 2^2 = (x^2 - y^2 - 2xy)^2,$$

et qu'ainsi on peut trouver des valeurs de X , Y , U et V satisfaisant en même temps aux deux équations

$$X^2 + aY^2 = U^2, \quad X^2 - aY^2 = V^2,$$

lorsque a est de la forme xy ($x^2 - y^2$). On prouve d'ailleurs aisément que la condition est nécessaire.

Je vais maintenant démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME VII. — *a et b étant des nombres entiers quelconques, on peut toujours trouver une infinité de valeurs de c , telles que l'équation (55) puisse être résolue en nombres entiers.*

En faisant d'abord dans les formules (27) $z = 0$, $u = 0$, on a

$$X = x^2, \quad Y = 2xy, \quad U = y^2, \quad V = 0.$$

Si l'on remplace ensuite dans les formules (23) X , x , ... respectivement par X' , X , ... , et que l'on y fasse $z_1 = 1$, $u_1 = 0$, on a

$$\begin{aligned} X' &= Xx_1 + rU + rVy_1, & Y' &= Xy_1 + Yx_1 + rV, \\ U' &= X + Ux_1 + Yy_1, & V' &= Vx_1 + Y + Uy_1; \end{aligned}$$

et, en mettant dans ces dernières formules les expressions de X , Y , U , V que donnent les précédentes, on a

$$\begin{aligned} X' &= x^2x_1 + ry^2, & Y' &= 2xyx_1 + x^2y_1, \\ U' &= y^2x_1 + 2xyy_1 + x^2, & V' &= y^2y_1 + 2xy. \end{aligned}$$

Si ensuite on égale à zéro U' et V' , et que l'on résolve, par rapport à x_1 et y_1 , les équations ainsi obtenues, on a

$$x_1 = \frac{3x^2}{y^2}, \quad y_1 = \frac{-2x}{y};$$

et, en substituant ces valeurs de x_1 , y_1 dans X' , Y' et dans Z_1 [Z_1 désigne le résultat de la substitution de x_1 ,

γ_1, z_1 à x, γ, z dans l'expression (25) de Z], on obtient

$$X' = \frac{3x^4 + r\gamma^4}{\gamma^2}, \quad Y' = \frac{4x^3\gamma}{\gamma^2}, \quad Z_1 = \frac{81x^8 + 144rx^4\gamma^4 + r^2\gamma^8}{\gamma^8}.$$

Multipliant maintenant par Z_1 les deux membres de l'équation (26), où l'on remplace X, Y, U, V respectivement par $X', Y', 0, 0$, les nouvelles valeurs de X, Y, Z , c'est-à-dire X', Y', Z_1 , étant données par les formules précédentes, après avoir remplacé r par $\frac{-b}{a}$, on aura l'identité

$$(62) \quad \begin{cases} a(3ax^4 - by^4) + b^4(axy^4 \\ = (81a^3x^8 - 144a^2bx^4y^4 + ab^2y^8)(ax^4 + by^4). \end{cases}$$

Le théorème VII se trouve ainsi démontré.

15. *Recherche des formules qui donnent une infinité de solutions de l'équation (55) lorsque l'on connaît une première solution, mais seulement dans le cas où a et c sont égaux à 1.*

Si l'on fait $a = 0$ et que l'on change b en $-b$ dans l'équation (11) et dans les formules (10) du n° 4, on a

$$\begin{aligned} X_2^2 - bY_2^2 &= Z^4, \\ X_2 &= x^4 + 6bx^2\gamma^2 + b^2\gamma^4, \\ Y_2 &= 4x\gamma(x^2 + b\gamma^2), \quad Z = x^2 - b\gamma^2; \end{aligned}$$

et, par suite, il vient

$$(x^4 + 6bx^2\gamma^2 + b^2\gamma^4)^2 - 16b^2x^2\gamma^2(x^2 + b\gamma^2)^2 = (x^2 - b\gamma^2)^4.$$

Changeons maintenant dans l'identité précédente x, γ en x^2, γ^2 , puis supposons que (x, γ, z) soit une solution de l'équation

$$63 \quad X^4 + bY^4 = Z^2;$$

alors, de l'identité précédente, on déduit

$$(x^4 - by^4)^4 + b(2xyz)^4 = (z^4 + 4bx^4y^4)^2.$$

De là il suit que, (x, y, z) étant une première solution de l'équation (63), on en aura une seconde (X, Y, Z) par les formules

$$(64) \quad X = x^4 - by^4, \quad Y = 2xyz, \quad Z = z^4 + 4bx^4y^4.$$

Les formules précédentes sont dues à Lagrange, qui les démontre, moins simplement que nous l'avons fait, dans son Mémoire déjà plusieurs fois cité (*); mais son analyse a l'avantage de pouvoir s'étendre sans modification au cas où l'équation (63) contient en plus le terme dx^2y^2 . Il suffit, en effet, de prendre pour point de départ, au lieu de l'identité employée par Lagrange,

$$(x^2 - by^2)^2 + b(2xy)^2 = (x^2 + by^2)^2,$$

l'identité un peu plus générale (6). On a alors les formules

$$(65) \quad X = x^4 - by^4, \quad Y = 2xyz, \quad Z = z^4 + (4b - d^2)x^4y^4.$$

Remarque. — On peut encore donner plusieurs autres démonstrations des formules (64). On les démontre d'abord très-simplement par la méthode de Fermat, et aussi par un moyen que j'ai indiqué dans les *Nouvelles Annales* (**): voici encore une nouvelle manière de les démontrer.

Remplaçant dans les formules (25) et (27) z par t et r par $-b$, puis résolvant par rapport à t et u les équations que l'on obtient en égalant à zéro U et V , on a

$$u = \frac{x^2 \pm \sqrt{x^4 + by^4}}{-by}, \quad t = -\frac{xu}{y}.$$

(*) Voyez le t. IV des *OEuvres de Lagrange*, p. 395. — Édition SERRET.

(**) Voir la question 1324, numero d'août 1879.

Or, si l'on suppose que (x, y, z) soit une solution de l'équation (63), il vient

$$u = -\frac{x^2 + z}{by}, \quad t = \frac{x(x^2 + z)}{by^2};$$

et, en substituant ces valeurs de u et t dans les expressions de X, Y, Z données par les formules (25) et (27), on a

$$X = \frac{2(x^2 + z)(x^4 - by^4)}{by^4}, \quad Y = \frac{4(x^2 + z)xyz}{by^4},$$

$$Z = \frac{4(x^2 + z)^2(z^4 + 4bx^4y^4)}{b^2y^8},$$

et, par suite, l'identité

$$(x^4 - by^4)^4 + b(2xyz)^4 = (z^4 + 4bx^4y^4)^2.$$

La démonstration s'achève alors comme la première.

16. *Formules nouvelles qui permettent, connaissant une solution (x, y, z) de l'équation générale (55), d'en trouver une autre (X, Y, Z) .*

Changeons d'abord, dans les formules (23) du n° 6, $X, x, y, z, u, \dots$, en $X_1, X, Y, U, V, \dots$ et faisons-y $z_1 = u_1 = 0, x_1 = y_1 = 1$: on a

$$X_1 = X + rV, \quad Y_1 = X + Y, \quad U_1 = Y + U, \quad V_1 = U + V.$$

Si ensuite, dans les formules (27), on fait $x = 0, y = ru$, on a

$$X = r(z^2 + 2ru^2), \quad Y = 2rz u,$$

$$U = (r^2 + r)u^2, \quad V = 2rz u,$$

et, par suite,

$$X_1 = r(z^2 + 2ru^2 + 2rz u), \quad Y_1 = r(z^2 + 2ru^2 + 2z u),$$

$$U_1 = ru[(r + 1)u + 2z], \quad V_1 = ru[(r + 1)u + 2z].$$

En posant maintenant

$$z = - \frac{(r+1)u}{2},$$

on a

$$X_1 = \frac{ru^2}{4}(-3r^2 + 6r + 1), \quad Y_1 = \frac{ru^2}{4}(r^2 + 6r - 3),$$

$$U_1 = 0, \quad V_1 = 0.$$

D'ailleurs Z_1 est égal à $1-r$, et, en faisant dans l'expression de Z (25)

$$x = 0, \quad y = ru, \quad z = - \frac{r+1}{2} u,$$

on obtient

$$Z = \frac{r^2 u^4}{16} (r^4 - 28r^3 + 6r^2 - 28r + 1);$$

on a donc l'identité

$$\begin{aligned} & (3r^2 - 6r - 1)^4 - r(3 - 6r - r^2)^4 \\ &= (1-r)(r^4 - 28r^3 + 6r^2 - 28r + 1)^2, \end{aligned}$$

ou, en remplaçant r par $\frac{-y}{x}$,

$$(66) \quad \begin{cases} x(3y^2 + 6xy - x^2)^4 + y(3x^2 + 6xy - y^2)^4 \\ = (x+y)(x^4 + y^4 + 28xy^3 + 28yx^3 + 6x^2y^2)^2. \end{cases}$$

L'identité précédente peut encore s'écrire :

$$\begin{aligned} & x[3(x+y)^2 - 4x^2]^4 + y[3(x+y)^2 - 4y^2]^4 \\ &= (x+y)[4(x+y)^4 - 3(x-y)^4]^2, \end{aligned}$$

et, en y changeant x, y respectivement en ax^4, by^4 , on a

$$\begin{aligned} & a\{x[3(ax^4 + by^4)^2 - 4a^2x^8]\}^4 + b\{y[3(ax^4 + by^4)^2 - 4b^2y^8]\}^4 \\ &= (ax^4 + by^4)[4(ax^4 + by^4)^4 - 3(ax^4 - by^4)^4]^2. \end{aligned}$$

Si maintenant on suppose que (x, y, z) soit une solution de l'équation proposée, on déduit de l'identité précé-

dente l'équation

$$a[x(3c^2z^4 - 4a^2x^8)]^4 + b[y(3c^2z^4 - 4b^2y^8)]^4 \\ = c[z[4c^4z^8 - 3(ax^4 - by^4)]^4],$$

et, par suite, on aura une nouvelle solution (X, Y, Z) par les formules

$$(67) \quad \begin{cases} X = x(3c^2z^4 - 4a^2x^8), & Y = y(3c^2z^4 - 4b^2y^8), \\ Z = z[4c^4z^8 - 3(ax^4 - by^4)]. \end{cases}^{(1)}$$

17. Résolution de l'équation

$$(68) \quad aX^4 + bY^4 = cZ^8.$$

Je me contenterai de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME VIII. — *a et b étant des nombres entiers quelconques, on peut toujours déterminer c d'une infinité de manières, de telle sorte que l'équation (68) puisse être résolue en nombres entiers.*

Faisant d'abord $z = 0$, $u = 0$ dans les formules (29), on a

$$X_1 = x^3, \quad Y_1 = 3x^2y, \quad U_1 = 3xy^2, \quad V_1 = y^3.$$

Si ensuite on change dans les formules (23) $X, x, \dots$ en $X', X, \dots$; qu'on y fasse $u_1 = 0$, $z = 1$, puis qu'on y remplace X_1, Y_1, U_1, V_1 par les expressions précédentes,

(1) J'étais déjà arrivé à ce résultat nouveau par une autre méthode (*Comptes rendus* du 7 octobre 1878); cette même méthode donne aussi les formules suivantes, qui s'appliquent au cas où l'équation biquadratique contient en plus le terme dx^2y^2 :

$$X = x[4bcy^4z^2 - (ax^4 - by^4)^2], \quad Y = y[4acx^4z^2 - (ax^4 - by^4)^2], \\ Z = z\{f[2x^2y^2(ax^4 - by^4)]^2 - (c^2z^4 - fx^4y^4)\}^{\frac{1}{2}}.$$

[Dans la dernière formule, on a représenté par f la quantité $d^2 - 4ab$.]

on a

$$(69) \quad \begin{cases} X' = x^3 x_1 + r y^3 y_1 + 3 r x y^2, \\ Y' = 3 x y^2 y_1 + x^3 y_1 + r y^3, \\ U' = 3 x y^2 x_1 + 3 x^2 y y_1 + x^3, \\ V' = y^3 x_1 + 3 x y^2 y_1 + 3 x^2 y; \end{cases}$$

et si l'on résout par rapport à x_1 , y_1 les équations que l'on obtient en égalant U' et V' à zéro, il vient

$$x_1 = \frac{x^2}{y^2}, \quad y_1 = -\frac{4x}{3y}.$$

Si maintenant on substitue ces valeurs dans les expressions (69) de X' , Y' et aussi dans Z_1 où l'on a d'abord fait $u = 0$, $v = 0$ [Z_1 est, comme à l'ordinaire, le résultat de la substitution de x_1 , y_1 , z_1 à x , y , z dans l'expression de Z (25)], on a

$$\begin{aligned} X' &= \frac{x(3x^4 + 5ry^4)}{3y^2}, \\ Y' &= \frac{r(5x^4 + 3ry^4)}{3y^2}, \\ Z &= \frac{81x^8 + 158rx^4r^4 + 81r^2y^8}{81y^8}. \end{aligned}$$

Alors, en procédant comme on l'a fait pour obtenir l'identité (62), on a, après avoir remplacé r par $-\frac{b}{a}$, l'identité

$$(69) \quad \begin{cases} a[x(3ax^4 - 5by^4)]^4 + b[y(5ax^4 - 3by^4)]^4 \\ = (81a^2x^8 - 158abx^4y^4 + 81b^2y^8)(ax^4 + by^4)^3, \end{cases}$$

qui démontre le théorème énoncé.

18. Résolution de l'équation

$$(70) \quad aX^4 + bY^4 = cZ^4.$$

Si l'on part de l'identité évidente

$$(71) \quad (x + 2y)^4 - (x - 2y)^4 = 4xy(x^2 + 4y^2) \times 2^4$$

et qu'on y change x, y en x^4, y^4 , on a

$$(72) \quad (x^4 + 2y^4)^4 - (x^4 - 2y^4)^4 = (x^8 + 4y^8) \times (2xy)^4.$$

On peut encore obtenir une troisième identité de la manière suivante.

En faisant $a = 0$ et $b = 1$ dans l'équation (11) et dans les formules (10) et (5), on a

$$(x^4 - 6x^2y^2 + y^4)^2 + [4xy(x^2 - y^2)]^2 = (x^2 + y^2)^4;$$

et, si l'on multiplie par 2 les deux membres de l'identité précédente, puis que l'on y remplace une expression de la forme $2(s^2 + t^2)$ par $(s + t)^2 + (s - t)^2$, il vient

$$[(x + y)^4 - 4xy^2(3x + 2y)]^2 + [(x + y)^4 - 4x^2y(2x + 3y)]^2 \\ = [2(x^2 + y^2)]^4.$$

On vérifie d'ailleurs facilement que l'on a

$$[(x + y)^4 - 4xy^2(3x + 2y)]^2 - [(x + y)^4 - 4x^2y(2x + 3y)]^2 \\ = 16xy(x^2 - y^2)[(x^2 - y^2)^2 - 4x^2y^2];$$

et en multipliant, membre à membre, les deux dernières identités, on obtient

$$(73) \quad \left\{ \begin{array}{l} [(x + y)^4 - 4xy^2(3x + 2y)]^4 \\ \quad - [(x + y)^4 - 4x^2y(2x + 3y)]^4 \\ \quad = 2xy(x^2 - y^2)[(x^2 - y^2)^2 - 4x^2y^2](2x^2 + 2y^2)^5. \end{array} \right.$$

Remarque. — On peut encore obtenir l'identité précédente en partant de l'identité (59), dont on met le second membre sous la forme $[(y^2 + 2x^2)^2 - 8x^2]^2$, et il ne reste plus qu'à remplacer, au moyen d'un changement de variables, la quantité entre crochets par un carré; ce qui n'offre aucune difficulté.

Les identités (71), (72) et (73) montrent que l'équation (70) peut être résolue en nombres entiers lorsque, a et b étant respectivement égaux à 1 et -1, c a l'une des formes

$$xy(x^2 + 4y^2), \quad x^8 + 4y^8, \quad 2xy(x^2 - y^2)[(x^2 - y^2)^2 - 4x^2y^2].$$

Je vais maintenant démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME IX. — *Lorsque a et b sont des nombres entiers quelconques, on peut trouver une infinité de valeurs de c telles, que l'équation (70) puisse être résolue en nombres entiers.*

Prenons l'identité (30) du n° 6. Les valeurs de X_2 , Y_2 , U_2 , V_2 n'ont pas été calculées; mais, si l'on suppose z et u nuls, on obtient aisément, par la méthode ordinaire,

$$X_2 = x^4 + ry^4, \quad Y_2 = 4x^3y, \quad U_2 = 6x^2y^2, \quad V_2 = 4xy^3.$$

Si l'on suppose maintenant que l'on multiplie par Z_1 les deux membres de l'équation (30), Z_1 ayant la signification connue, ainsi que X' , Y' , U , V' , on a, en faisant $u_1 = 0$, $z_1 = 1$,

$$X' = (x^4 + ry^4)x_1 + 4rxy^3y_1 + 6rx^2y,$$

$$Y' = 4x^3yx_1 + (x^4 + ry^4)y_1 + 4rxy^3,$$

$$U' = 6x^2y^2x_1 + 4x^3yy_1 + x^4 + ry^4,$$

$$V' = 4xy^3x_1 + 6x^2y^2y_1 + 4x^3y,$$

$$Z_1 = (x_1^2 - r)^2 - ry_1^2(y_1^2 - 4x_1);$$

puis, si l'on résout par rapport à x_1 , y_1 les équations $U' = 0$, $V' = 0$, on a les valeurs

$$x_1 = \frac{5x^4 - 3ry^4}{10x^2y^2}, \quad y_1 = \frac{ry^4 - 5x^4}{5x^2y^2},$$

que l'on substitue dans Z' , Y' , U' , V' , Z_1 . On voit alors

(444)

que, en remplaçant r par $-\frac{b}{a}$, on peut prendre pour valeurs de X', Y', Z_1, Z satisfaisant à l'identité

$$\begin{aligned}
 (74) \quad & aX'^4 + bY'^4 = Z_1Z, \\
 & X' = x(5a^4x^8 - 22abx^4y^4 + 5b^2y^8), \\
 & Y' = 2y(5a^2x^8 - 10abx^4y^4 + b^2y^8), \\
 & Z_1 = 625a^5x^{20} - 3500a^4bx^{16}y^4 + 5350a^3b^2x^{12}y^8 \\
 & \quad - 860a^2b^3x^8y^{12} - 79ab^4x^4y^{16} + 16b^5y^{20}, \\
 & Z = ax^4 + by^4.
 \end{aligned}$$

Le théorème IX est ainsi démontré.