

ARTHUR LEINCHUGEL

**Concours d'admission à l'École centrale.
2e session. 17 et 18 octobre 1878**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 18
(1879), p. 365-367

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__365_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1879, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE

2^e SESSION. — 17 ET 18 OCTOBRE 1878.

(voir 2^e série, t. XVIII, p. 93);

SOLUTION DE M. ARTHUR LEINCHUGEL,

Étudiant en Mathématiques.

1^o On donne dans un plan une droite P et un point F , pris en dehors et à une distance a de cette droite : écrire l'équation générale des hyperboles qui ont le point F pour un de leurs foyers, et la droite P pour une de leurs asymptotes.

2^o Du centre de chacune de ces hyperboles on mène

à la droite P une perpendiculaire qu'on prolonge jusqu'à son intersection M avec la directrice correspondant au foyer F : trouver l'équation de la courbe lieu des points M, et indiquer la position de cette courbe.

3° Former l'équation du lieu des projections du foyer F sur la seconde asymptote de chacune des hyperboles considérées.

Prenons pour axe des x la droite donnée et pour axe des y la perpendiculaire FO, abaissée du foyer F sur cette droite.

1° La directrice correspondant au foyer F passant par l'origine O, l'équation générale des coniques ayant un de leurs foyers au point F est

$$x^2 + (y - a)^2 = (\lambda x + \mu y)^2.$$

L'axe des x étant l'une des asymptotes des hyperboles considérées, $\lambda = +1$, et l'équation générale de ces coniques est

$$(1) \quad x^2 + (y - a)^2 = (x + \mu y)^2.$$

2° Les coordonnées du centre C de l'hyperbole représentée par l'équation (1) sont, $y = 0$, $x = -\frac{a}{\mu}$, et l'équation de la perpendiculaire CM à la droite P est

$$(2) \quad \mu x + a = 0.$$

L'équation de la directrice OM correspondant au foyer F est

$$(3) \quad \mu y + x = 0.$$

Multiplions respectivement les équations (2) et (3) par y et x , et retranchons membre à membre les équations résultantes; il vient

$$x^2 - ay = 0.$$

Le lieu des points M est donc une parabole de paramètre $\frac{a}{2}$, ayant OF pour axe et Ox pour tangente au sommet.

On peut trouver facilement ce lieu par la Géométrie.

En effet, abaissons sur OF la perpendiculaire MP, et soit D le point d'intersection de FC avec OM. Les triangles semblables OMP, OFD donnent

$$OD \cdot OM = OF \cdot OP.$$

Or,

$$OC^2 = OD \cdot OM;$$

donc

$$OC^2 = OF \cdot OP = OF \times MC, \quad \text{ou} \quad x^2 = ay.$$

3° La figure étant symétrique par rapport à CF, *le lieu des projections du foyer F sur la seconde asymptote de chacune des hyperboles considérées* est évidemment la circonférence décrite de F comme centre, avec a pour rayon. L'équation de ce lieu est

$$(4) \quad x^2 + y^2 - 2ay = 0.$$

En traitant cette dernière question au moyen de l'équation générale (1), on arrive à une équation du quatrième degré dans laquelle on peut mettre en facteur le premier membre de l'équation (4). Cette équation du quatrième degré montre que le point F est un point isolé.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc; Lez; Robaglia; G. Lambiotte, élève à l'École polytechnique de Bruxelles; G. Kœnigs, de Toulouse; H. Rigolot.