Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 311-315

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__311_1>

CORRESPONDANCE.

1. Sur la question de *calculer les côtés d'un triangle, connaissant les bissectrices intérieures de ses trois angles.*

Un abonné demande s'il en existe une solution *simple ;* pour ma part, je n'en connais aucune. On m'a récemment donné communication d'une Note relative à des cas particuliers de cette question; j'en extrais ce qui suit.

« *Désignons par* a, b, c *les côtés, et par* α, β, γ *les bissectrices des angles opposés* A, B, C; *on a les trois équations*

$$(1)\qquad bc\left[(b+c)^2-a^2\right]=\alpha^2(b+c)^2,$$

$$(2)\qquad ac\left[(a+c)^2-b^2\right]=\beta^2(a+c)^2,$$

$$(3)\qquad ab\left[(a+b)^2-c^2\right]=\gamma^2(a+b)^2.$$

Si α, *par exemple, au lieu d'être la bissectrice de* A, *était la bissectrice de l'angle adjacent supplémentaire, il faudrait, dans l'égalité* (1), *changer b en $-b$, ou c en $-c$. Il en résulte que, si du système proposé on déduit une valeur négative pour l'un des côtés, c par exemple, la valeur absolue de ce côté se rapportera au cas où les bissectrices des angles* A *et* B *seraient remplacées par les bissectrices des angles supplémentaires. Ce cas est d'ailleurs le seul à considérer, car les équations* (1), (2), (3) *ne changent pas lorsqu'on change simultanément les signes de a, b, c.*

Supposons $\alpha = \beta$. Si α, β sont deux bissectrices de même espèce, toutes deux intérieures ou toutes deux extérieures, on démontre en Géométrie que $a = b$ (*).

En supposant $\alpha = \beta$ et $a = b$, les équations (1) *et* (2) *se réduisent à une seule*

$$ac^2(2a + c) = \alpha^2(a + c)^2, \tag{4}$$

et l'équation (3) *devient*

$$4a^2 - c^2 = 4\gamma^2. \tag{5}$$

L'équation (4) *peut s'écrire*

$$2a^2c^2 - \alpha^2(a^2 + c^2) = ac(2\alpha^2 - c^2),$$

et, en remplaçant c^2 par sa valeur tirée de l'équation (5),

$$8a^2(a^2 - \gamma^2) - \alpha^2(5a^2 - 4\gamma^2) = 2ac(\alpha^2 - 2a^2 + 2\gamma^2),$$

d'où

$$c = \frac{8a^2(a^2 - \gamma^2) - \alpha^2(5a^2 - 4\gamma^2)}{2a(\alpha^2 - 2a^2 + 2\gamma^2)}. \tag{6}$$

(*) On admet, sans doute, ici que les bissectrices *extérieures* α, β sont, à partir des sommets A, B, dirigées toutes deux d'un même côté de la droite AB, car autrement l'égalité de ces deux bissectrices n'entraînerait pas celle des côtés a, b. (G.)

Portant cette valeur de c dans l'équation (5), *on obtient l'équation en a*

$$(7)\quad \begin{cases} 16a^2(a^2-\gamma^2)(\alpha^2-2a^2+2\gamma^2)^2 \\ \quad -[8a^2(a^2-\gamma^2)-\alpha^2(5a^2-4\gamma^2)]^2=0. \end{cases}$$

Le terme en a^8 *disparaît, et l'on a une équation du sixième degré qui ne contient l'inconnue a qu'à des puissances paires.*

Il n'est rien dit, dans la Note, des racines de cette équation du sixième degré. On y suppose $\alpha=\gamma$, et alors, au moyen de calculs qui exigent quelques développements, on déduit de l'équation (7) ces trois valeurs de a^2

$$\frac{4\alpha^2}{3},\quad \left(\frac{13+\sqrt{425}}{32}\right)\alpha^2,\quad \left(\frac{13-\sqrt{425}}{32}\right)\alpha^2;$$

la troisième, étant négative, correspond à des solutions imaginaires.

Pour $a^2=\frac{4\alpha^2}{3}$, l'équation (6) donne $c=a$; le triangle est équilatéral.

La valeur de c correspondante à $a^2=\left(\frac{13+\sqrt{425}}{32}\right)\alpha^2$ est négative; *cette solution se rapporte au cas particulier où l'on considère les bissectrices extérieures des angles* A, B, *et la bissectrice intérieure de l'angle* C.

Note du Rédacteur. — Lorsque $\alpha=\beta$ et $a=b$, en prenant pour inconnue auxiliaire le rapport $\frac{a}{c}$, on obtient assez simplement une équation du troisième degré dont la discussion est facile.

La division de l'équation (5) par l'équation (4), membre à membre, donne

$$\frac{2a-c}{ac^2}=\frac{4\gamma^2}{\alpha^2}\,\frac{1}{(a+c)^2},$$

et, si l'on pose $\frac{a}{c}=x$, ou $a=cx$ et $\frac{\gamma}{\alpha}=m$, il vient

$$\frac{2cx-c}{c^3x}=\frac{4m^2}{(cx+c)^2},$$

d'où

$$\frac{2x-1}{x}=\frac{4m^2}{(x+1)^2},\quad (2x-1)(x+1)^2=4m^2x$$

et, par suite,

$$(1')\qquad 2x^3+3x^2-4m^2x-1=0.$$

Cette dernière équation a une racine positive plus grande que $\frac{1}{2}$, et deux racines négatives dont les valeurs absolues sont, l'une plus petite que 1, et l'autre plus grande.

Soit h la racine positive; à cette racine h correspond $a=ch$; et des égalités $a=ch$ et (5) $4a^2-c^2=4\gamma^2$ on tire

$$4c^2h^2-c^2=4\gamma^2,\quad c=\frac{2\gamma}{\sqrt{4h^2-1}},\quad a=\frac{2h\gamma}{\sqrt{4h^2-1}}.$$

Ces valeurs de c et a sont réelles, positives et finies, puisque l'on a $h>\frac{1}{2}$.

Ainsi, quelles que soient les valeurs attribuées aux bissectrices intérieures α, γ, la question admet une solution réelle, et une seule.

Quand $\alpha=\gamma$, $m=1$, $h=1$, $c=\frac{2\gamma}{\sqrt{3}}=a$. Le triangle est équilatéral.

Si $m=\frac{1}{2}$, ou $\alpha=2\gamma$, l'équation (1′) devient $2x^3+3x^2-x-1=0$, ou $(2x+1)(x^2+x-1)=0$; la racine positive $h=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$; il en résulte $c=\frac{2\gamma}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}$, $a=\frac{\gamma(-1+\sqrt{5})}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}$, et $c=a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$; donc c est le côté d'un décagone étoilé inscrit dans le cercle dont le rayon est a. Par conséquent, $A=36°$, $B=36°$, $C=108°$.

Les deux racines négatives de l'équation (1′), changées de signe, prises en valeur absolue, répondent à cette autre question : *Déterminer les côtés d'un triangle isoscèle* CAB, *connaissant les bissectrices extérieures* α, β *des deux angles égaux* A, B, *et la bissectrice intérieure* γ *du troisième angle* C.

Car, en prenant pour inconnue, x, le rapport $\frac{a}{c}$, la question conduit à l'équation

$$(2')\qquad 2x^3-3x^2-4m^2x+1=0,$$

qu'on obtient en remplaçant x par $-x$, dans l'équation

$$(1')\qquad 2x^3+3x^2-4m^2x-1=0,$$

relative aux trois bissectrices intérieures.

On a encore l'égalité (5) $4a^2-c^2=4\gamma^2$, et, comme $a=cx$, il s'ensuit

$$(4x^2-1)c^2=4\gamma^2,\quad c=\frac{2\gamma}{\sqrt{4x^2-1}},\quad a=\frac{2\gamma x}{\sqrt{4x^2-1}}.$$

Pour que ces valeurs de a et c soient réelles, positives et finies, il faut et il suffit que la valeur de x surpasse $\frac{1}{2}$. C'est dire que le nombre des solutions réelles de la question proposée est égal au nombre des racines de l'équation (2'), supérieures à $\frac{1}{2}$. Or, cette équation a, quel que soit m, ou $\frac{\gamma}{\alpha}$, deux racines positives, l'une plus grande que l'unité et l'autre comprise entre 0 et 1. La première, que nous désignerons par x_1, donne la solution

$$c = \frac{2\gamma}{\sqrt{4x_1^2 - 1}}, \quad a = \frac{2\gamma x_1}{\sqrt{4x_1^2 - 1}}.$$

Quant à la racine comprise entre 0 et 1, elle ne surpassera $\frac{1}{2}$ que si l'on a $m < \frac{1}{2}$, comme il est facile de s'en assurer.

Donc le nombre des solutions de la question proposée sera 2, ou seulement 1, suivant qu'on aura $\alpha > 2.\gamma$, ou $\alpha \leqq 2.\gamma$.

Lorsque $\gamma = \alpha$, $m = 1$, et l'équation (2') devient

$$2x^3 - 3x^2 - 4x + 1 = (x + 1)(2x^2 - 5x + 1) = 0.$$

La racine positive $x_1 > \frac{1}{2}$ est égale à $\frac{5 + \sqrt{17}}{4}$, et les côtés c, a ont, respectivement, pour valeurs

$$\frac{4\gamma}{\sqrt{38 + 10\sqrt{17}}}, \quad \frac{(5 + \sqrt{17})\gamma}{\sqrt{38 + 10\sqrt{17}}}.$$

Si $\gamma = \frac{\alpha}{2}$, $m = \frac{1}{2}$; l'équation (2') se réduisant à

$$2x^3 - 3x^2 - x + 1 = (1 - 2x)(x^2 - x - 1) = 0,$$

on a

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad c = \frac{2\gamma}{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}, \quad a = \frac{(1 + \sqrt{5})\gamma}{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}$$

et

$$c = a\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right).$$

Cette dernière égalité montre que c est le côté du décagone régulier inscrit dans le cercle dont le rayon est a; donc

$$A = 72^\circ, \quad B = 72^\circ, \quad C = 36^\circ.$$

(G.)

2. M. Alfred Germot a résolu la question du Concours d'admission à l'École Normale, dont une solution a été insérée dans le numéro de juin, page 283.