

ÉDOUARD LUCAS

Problème sur l'ellipsoïde

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 18
(1879), p. 304-305

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__304_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1879, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROBLÈME SUR L'ELLIPSOÏDE;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée Charlemagne.

Trouver le lieu des sommets des tétraèdres dont les hauteurs se rencontrent et dont les faces sont tangentes à l'ellipsoïde, aux points où ces faces sont rencontrées par les hauteurs.

Dans un remarquable Mémoire sur les normales aux coniques, M. Desboves a démontré que, si d'un point on abaisse six normales sur l'ellipsoïde, et si l'on désigne par (x, y, z) les coordonnées du pôle du plan passant par trois des pieds des normales, celles du pôle du plan passant par les trois autres sont respectivement $-\frac{a^2}{x}$, $-\frac{b^2}{y}$, $-\frac{c^2}{z}$.

Cela posé, désignons par (x_0, y_0, z_0) le pied de la normale situé sur le sommet du tétraèdre ayant pour coordonnées (x, y, z) ; on a

$$(1) \quad \frac{a^2(x - x_0)}{x_0} = \frac{b^2(y - y_0)}{y_0} = \frac{c^2(z - z_0)}{z_0} = \lambda;$$

le point ayant pour coordonnées $-\frac{a^2}{x}, -\frac{b^2}{y}, -\frac{c^2}{z}$ se trouve nécessairement situé dans le plan tangent à l'ellipsoïde au point (x_0, y_0, z_0) ; on a donc

$$(2) \quad \frac{x_0}{x} + \frac{y_0}{y} + \frac{z_0}{z} + 1 = 0.$$

Des équations (1) on tire linéairement x_0, y_0, z_0 et, en les portant dans l'équation (2) et celles de l'ellipsoïde, on obtient

$$(3) \quad \frac{a^2}{a^2 + \lambda} + \frac{b^2}{b^2 + \lambda} + \frac{c^2}{c^2 + \lambda} + 1 = 0,$$

et

$$(4) \quad \frac{a^2 x^2}{(a^2 + \lambda)^2} + \frac{b^2 y^2}{(b^2 + \lambda)^2} + \frac{c^2 z^2}{(c^2 + \lambda)^2} = 1.$$

Donc le lieu des sommets des tétraèdres se compose de trois ellipsoïdes réels et concentriques à l'ellipsoïde proposé (*).

(*) Cette question a été traitée d'une façon bien différente, et pour le plan seulement, par MM. Bourguet et Poujade (*Nouvelles Annales*, 2^e série, t. XIII, p. 576, et t. XVI, p. 186).

La méthode précédente donne un grand nombre de conséquences analogues à celle que donne la solution du problème ci-dessus.