NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. BOUGLÉ

Question proposée au concours général de 1877, pour la classe de mathématiques spéciales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 13-19

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__13_1>

QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS GÉNÉRAL DE 1877

POUR LA CLASSE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES;

SOLUTION DE M. E. BOUGLÉ,
Élève du collége Rollin (*).

Rechercher les surfaces S *du second degré sur lesquelles il existe une droite* D, *telle que l'hyperboloïde de révolution* H, *qui a pour axe une génératrice rectiligne quelconque* G, *de la surface* S, *et du même système que* D, *et qui passe par la droite* D, *coupe orthogonalement la surface* S *en tous les points de cette droite.*

Si l'on considère tous les hyperboloïdes H *qui se rapportent à une même surface* S *jouissant de la propriété énoncée :*

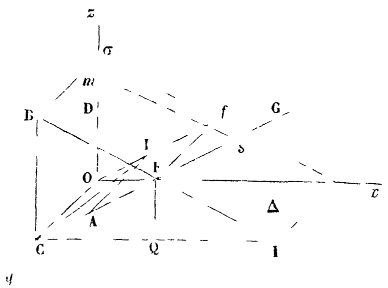
1° *Trouver le lieu des sommets* A *et celui des foyers* F

(*) M. E. Bouglé a obtenu le prix d'honneur.

des hyperboloïdes H′ *conjugués des hyperboloïdes* H :

2° *Par l'un des foyers* F *de l'hyperboloïde* H′, *on mène un plan* P *parallèle à la perpendiculaire commune aux deux droites* G *et* D, *et faisant, avec cette dernière, un angle supplémentaire de celui que fait avec cette même droite l'axe* G *de l'hyperboloïde* H ; *trouver le lieu de la droite qui joint le point où le plan* P *coupe la droite* D *à l'un des points où ce plan coupe la courbe d'intersection de la surface* S *et de l'hyperboloïde* H.

Soit un point m de la droite D ; le plan tangent en ce point aux hyperboloïdes H est perpendiculaire au plan tangent à la surface S, de plus il passe par D ; donc il



est le même pour toutes les surfaces H ; la normale à tous les hyperboloïdes est donc aussi la même, mais elle rencontre les axes de tous les hyperboloïdes, c'est-à-dire les génératrices de S ; donc elle est située sur S. D'ailleurs, elle est perpendiculaire à D, et, comme elle est la seconde génératrice de S qui passe par le point m, S est un paraboloïde ayant D pour directrice, et un plan perpendiculaire à D pour plan directeur correspondant.

Réciproquement, considérons un tel paraboloïde ; il jouit de la propriété de la surface S. En effet, soit la génératrice mS qui passe par m, le plan tangent à S est déterminé par la droite D ; la normale à un hyperboloïde H doit être perpendiculaire à D et rencontrer l'axe G : donc ce n'est autre que mS, puisque G et mS sont des génératrices de système différent de S et par suite se rencontrent. Le plan tangent à S passe donc par la normale à H : ces deux plans tangents sont donc perpendiculaires.

Cela posé, le second plan directeur du paraboloïde, étant parallèle à D perpendiculaire à Δ, est aussi perpendiculaire à ce plan. Les deux plans directeurs sont donc perpendiculaires.

Enfin considérons le plan tangent au sommet : il coupe la surface suivant deux droites ; chacune d'elles est perpendiculaire au plan directeur qui ne la contient pas : donc on pourra prendre pour la droite D l'une ou l'autre de ces deux droites. Il n'y a pas sur la surface d'autre droite jouissant de la propriété de D, car il y aurait sur le paraboloïde deux génératrices perpendiculaires à un plan directeur et par suite parallèles.

1° Prenons pour axe des x l'axe du paraboloïde, et pour axes des y et des z les génératrices du sommet.

La droite D sera alors Oz par exemple.

L'équation de S

$$yz = px,$$

et les équations de G

$$y = p\lambda, \quad z = \frac{x}{\lambda}.$$

Cherchons l'équation de la surface engendrée par l'axe des z tournant autour de G, on trouve facilement

$$(\text{H}) \qquad p^2\lambda^2 + (\lambda x + z)^2 = x^2 + (\lambda - p\lambda)^2 + z^2.$$

Remarquons que la perpendiculaire commune à (G) et à (D) est précisément Oy ; par suite, le centre de l'hyperboloïde H est C et le rayon du cercle de gorge OC.

Cherchons les points de rencontre de l'axe avec l'hyperboloïde : on trouve

$$z^2 = -\frac{p^2}{\lambda^2+1};$$

les valeurs de z sont donc imaginaires; mais, si l'on prend les valeurs réelles

$$z^2 = \frac{p^2}{\lambda^2+1},$$

on aura justement les z des sommets réels A de l'hyperboloïde H′ conjugué de H.

Si donc on élimine λ entre cette équation et les équations de G, on aura le lieu : ce lieu sera défini par l'intersection du paraboloïde avec une autre surface; pour l'avoir, on tire $\lambda = \frac{x}{z}$ et, en portant dans la dernière équation, il vient

$$z^2 = \frac{p^2 z^2}{x^2+z^2} \quad \text{ou} \quad x^2+z^2 = p^2,$$

c'est-à-dire un cylindre de révolution autour de Oy; on pouvait voir autrement ce résultat, en construisant la longueur des axes de la section méridienne de H dans le plan COG; CO est en grandeur et en position l'axe réel de H : l'asymptote s'obtiendra en menant dans le plan COG une droite CE faisant avec G un angle ACE égal à celui de D, et G et EO seront l'axe imaginaire de H et réel de H′; or on a

$$\text{EO} = \text{CO} \operatorname{tang} \text{ECO},$$

et, en nous reportant aux équations de G,

$$\text{CO} = p\lambda, \quad \operatorname{tang}\text{ECO} = \frac{z}{x} = \frac{1}{\lambda};$$

donc

$$\text{EO} = p\lambda\frac{\varphi}{\lambda} = p,$$

c'est-à-dire que la distance du point A à l'axe Oy est constante.

Cherchons les foyers F. On a, par définition,

$$\overline{CF}^2 + \overline{OC}^2 + \overline{AO}^2$$

ou, en appelant x, y, z les coordonnées de F,

$$x^2 + y^2 = p^2 + p^2\lambda^2;$$

mais des équations de G on tire

$$n = \lambda z:$$

donc

$$z^2(1 + \lambda^2) = p^2(1 + \lambda^2)$$

ou

$$z^2 = p^2;$$

donc les foyers sont sur les génératrices d'intersection du paraboloïde avec deux plans parallèles au plan directeur et menés à la distance p.

2° Menons par le point F un plan parallèle à la plus courte distance entre Oz et G, c'est-à-dire à Oy. Son équation sera celle de sa trace sur zOx, ou une droite passant par la projection f de F et symétrique de la direction de la projection de G, $x = \lambda z$. Les coordonnées de f sont

$$x = p\lambda, \quad z = p.$$

On a donc, pour équation du plan P,

$$(x - p\lambda) + \lambda(z - p) = 0.$$

Cherchons son intersection avec Oz, on trouve

$$z = 2p,$$

ce qu'on pouvait voir directement ; en effet, coupons la figure par un plan mené par G perpendiculairement à Oy : il coupe P suivant la droite BFI symétrique de CF par rapport à FQ ; donc

$$QI = CQ \quad \text{et} \quad BC = 2FQ = 2p;$$

donc $O\sigma = 2p$.

Le point σ est donc fixe sur Oz ; par suite, la droite qui passe par le point de rencontre de P avec D engendrera un cône, ayant pour sommet σ. Pour trouver ce cône, nous définirons la droite mobile comme l'intersection du plan P avec un cône ayant pour sommet σ et pour base la courbe d'intersection de H avec S.

Pour former l'équation de ce cône, transportons les axes au point σ. L'équation de la surface S est

$$(\mathrm{S}) \qquad y(z + 2p) = px$$

et celle de H

$$(\mathrm{H}) \qquad x^2(\lambda^2 - 1) - y^2 + 2\lambda xz + 2p\lambda(2x + y) = 0.$$

De S on tire

$$p = \frac{yz}{x - 2y}$$

et, en substituant dans l'équation,

$$x^2(\lambda^2 - 1) - y^2 + 2\lambda xz + \frac{2\lambda yz}{x - 2y}(2x + y) = 0,$$

équation homogène et du troisième degré, qui représente le cône auxiliaire.

Enfin, en éliminant λ entre cette équation et celle de P

$$x + \lambda z = 0$$

il vient, pour l'équation du lieu,

$$x^4(x - 2y) - z^2(3x - 2y)(x^2 + y^2) = 0,$$

ce qui représente un cône du cinquième degré. Construisons sa trace sur le plan des xy ; en posant $z^2 = 4p^2$, on a une courbe ayant pour centre l'origine, qu'on construit en posant $y = tx$.

Note. — MM. Levy et Hioux, professeur au lycee de Rennes, nous ont adresse une double solution analytique et geometrique; M. Gambey a envoye une solution purement analytique.