

H. COURBE

Questions de licence (1877) (faculté de Paris)

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 18 (1879), p. 123-126

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__123_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1879, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUESTIONS DE LICENCE (1877)

(FACULTÉ DE PARIS);

PAR M. H. COURBÉ.

1. Trouver les trajectoires orthogonales des courbes représentées en coordonnées polaires par l'équation

$$(1) \quad \rho^2 = a^2 \log \frac{\tan \omega}{c},$$

dans laquelle c est un paramètre variable.

En employant les coordonnées rectangulaires

$$x = \rho \cos \omega, \quad y = \rho \sin \omega, \quad \frac{y}{x} = \tan \omega,$$

on met l'équation (1) sous la forme

$$(2) \quad x^2 + y^2 - a^2 \log \frac{y}{cx} = 0,$$

ou

$$f(x, y) = 0.$$

Cette équation fournit la relation

$$\frac{f'_x}{f'_y} = \frac{y}{x} \frac{2x^2 + a^2}{2y^2 - a^2},$$

qui, portée dans l'équation de condition

$$1 - \frac{f'_x}{f'_y} \frac{dy}{dx} = 0,$$

donne

$$(3) \quad 1 - \frac{y}{x} \frac{2x^2 + a^2}{2y^2 - a^2} \frac{dy}{dx} = 0;$$

le paramètre c a disparu par la différentiation, de sorte que l'équation (3) est l'équation différentielle des trajectoires demandées.

Pour l'intégrer, on sépare les variables et l'on obtient l'équation

$$\frac{x dx}{x^2 + \frac{a^2}{2}} = \frac{y dy}{y^2 - \frac{a^2}{2}},$$

dont l'intégrale est

$$2x^2 + a^2 = b^2(2y^2 - a^2),$$

ou

$$(4) \quad 2x^2 - 2b^2y^2 + a^2(1 + b^2) = 0,$$

b^2 désignant une constante arbitraire, qui a dû être prise positive.

L'équation (4) représente les trajectoires orthogonales des courbes (1); ce sont des hyperboles ayant leur centre à l'origine, leurs foyers sur l'axe des y à une distance $\pm \frac{a(1+b^2)}{b\sqrt{2}}$ de l'origine, et dont les asymptotes sont représentées par l'équation double

$$y = \pm bx.$$

2. *L'angle α étant supposé compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, soit*

$$(1) \quad \rho^2 = a^2 \log \frac{\tan \omega}{\tan \alpha}$$

l'équation d'une courbe en coordonnées polaires; on demande si l'aire du secteur limité par cette courbe et par les rayons vecteurs correspondant à $\omega = \alpha$ et $\omega = \frac{\pi}{2}$ a une valeur finie ou infinie.

Le rayon vecteur ρ s'annulant pour $\omega = \alpha$ et devenant infini pour $\omega = \frac{\pi}{2}$, le secteur dont on veut étudier l'aire est illimité et compris entre la courbe passant à

l'origine et tangente à la droite qui fait un angle α avec l'axe polaire, et une perpendiculaire menée à cet axe par l'origine, et qui est une asymptote de la courbe.

Il s'agit de savoir si

$$\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{\tan \omega}{\tan \alpha} d\omega$$

a une valeur finie ou infinie.

Pour cela, comme

$$\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{\tan \omega}{\tan \alpha} d\omega = \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \log \tan \omega d\omega - \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \log \tan \alpha d\omega,$$

il suffit de chercher si

$$\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \log \tan \omega d\omega$$

a une valeur finie ou infinie.

Je remarque que

$$\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \log \tan \omega d\omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \tan \omega d\omega - \int_0^{\alpha} \log \tan \omega d\omega.$$

Or, α étant inférieur à $\frac{\pi}{2}$, aucun des éléments de $\int_0^{\alpha} \log \tan \omega d\omega$ ne devient infini; cette intégrale a une valeur finie, et il reste à considérer

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \tan \omega d\omega.$$

Mais

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \tan \omega d\omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin \omega d\omega - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos \omega d\omega,$$

et, comme on a évidemment

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin \omega \, d\omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos \omega \, d\omega,$$

l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \tan \omega \, d\omega$ est nulle; par conséquent, l'intégrale proposée a une valeur finie qui est

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_z^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{\tan \omega}{\tan z} \, d\omega \\ &= -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\pi}{2} - z \right) \log \tan z + \int_0^z \log \tan \omega \, d\omega \right]. \end{aligned}$$