

FAURE

## **Théorie des indices**

*Nouvelles annales de mathématiques 2<sup>e</sup> série*, tome 17  
(1878), p. 69-75

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1878\\_2\\_17\\_\\_69\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__69_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1878, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

## THÉORIE DES INDICES;

PAR M. FAURE,  
Chef d'escadrons d'Artillerie.

[FIN (\*).]

---

### *Propriétés de quatre surfaces passant par les mêmes points.*

168. Lorsque la droite  $\varepsilon'$  coïncide avec la droite  $\varepsilon$ , la relation (2)' du n<sup>o</sup> 148 devient

$$0 = I_2 - \varphi \sum \frac{|\varepsilon\nu|^2}{|\gamma\nu|^2} \frac{I_a I'_b + I_b I'_a}{ab} + \varphi^2 I'_1,$$

de sorte que, si  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont les paramètres des deux

---

(\*) *Nouvelles Annales*, 2<sup>e</sup> série, t. XV, p. 251, 292, 339, 451, 481, 529, et t. XVI, p. 5, 160, 193, 249, 289, 508, 541.

surfaces du système qui touchent la droite  $\varepsilon$ ,

$$\varphi_1 \varphi_2 = \frac{I_\varepsilon}{I_c},$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{l}{I_c}, \quad \frac{1}{\varphi_1} + \frac{1}{\varphi_2} = \frac{l}{I_c},$$

$l$  étant le coefficient de  $-\varphi$  dans l'équation écrite ci-dessus.

De la première de ces relations résulte ce théorème :

*Quatre surfaces passant par les mêmes points, si l'on mène une tangente commune  $\varepsilon$  à deux d'entre elles, le rapport  $\frac{I_\varepsilon}{I_c}$  des indices de cette droite par rapport aux deux autres  $S$  et  $S'$  est constant, quelle que soit cette tangente.*

En remplaçant le rapport  $\frac{I_\varepsilon}{I_c}$  par ses valeurs, on pourra donner à ce théorème des énoncés différents, analogues à ceux indiqués (164).

#### *Interprétation géométrique du coefficient $l$ .*

169. Désignons par  $g$  et  $h$  les points de contact de la droite  $\varepsilon$  avec les deux surfaces du système, qui touchent cette droite,

$$\varphi_g = \frac{I_\varepsilon}{I_g}, \quad \varphi_h = \frac{I_\varepsilon}{I_h},$$

de sorte que

$$\frac{I_g}{I_g} + \frac{I_h}{I_h} = \frac{l}{I_c}, \quad \frac{I_g}{I_g} + \frac{I_h}{I_h} = \frac{l}{I_c}.$$

Nous savons (154) que les points  $g$  et  $h$  sont conjugués à toutes les surfaces du système. Or il résulte du théorème (68, *b*) que, si l'on prend sur une droite fixe  $\varepsilon$  deux points  $g$  et  $h$  conjugués à  $S'$ , la somme  $\frac{I_g}{I_g} + \frac{I_h}{I_h}$  est con-

stante, et que, si ces points sont conjugués à  $S$ , la somme  $\frac{I'_g}{I_g} + \frac{I'_h}{I_h}$  est aussi constante quels que soient les points  $g$  et  $h$ . Il suit de là que, si ces sommes sont nulles, la droite  $\varepsilon$  coupera la surface  $S$  en deux points  $g$  et  $h$  conjugués à  $S'$  et la surface  $S'$  en deux points conjugués à  $S$ .

Ainsi l'équation  $l = 0$  représente le complexe des droites qui coupent les surfaces  $S$  et  $S'$  en quatre points harmoniques.

Les droites du complexe sont donc caractérisées par cette propriété; si, sur l'une d'elles, on prend deux points  $g$  et  $h$  conjugués soit à  $S$ , soit à  $S'$ , la somme des paramètres des surfaces du système, qui passent par ces points, est nulle; par conséquent, pour avoir des droites du complexe, il suffira de construire les deux surfaces du système

$$\begin{aligned} (\varphi) \quad & \frac{(a, E)^2}{I_a + \varphi I'_a} + \frac{(b, E)^2}{I_b + \varphi I'_b} + \frac{(c, E)^2}{I_c + \varphi I'_c} + \frac{(d, E)^2}{I_d + \varphi I'_d} = 0, \\ (-\varphi) \quad & \frac{(a, E)^2}{I_a - \varphi I'_a} + \frac{(b, E)^2}{I_b - \varphi I'_b} + \frac{(c, E)^2}{I_c - \varphi I'_c} + \frac{(d, E)^2}{I_d - \varphi I'_d} = 0, \end{aligned}$$

et de mener à ces surfaces des tangentes communes; en donnant à  $\varphi$  toutes les valeurs possibles, on aura toutes les droites du complexe.

En éliminant  $\varphi$  entre ces deux équations, on trouve que les plans tangents aux surfaces  $(\varphi)$  et  $(-\varphi)$  enveloppent la surface

$$m \cdot m' = I_E I'_E.$$

Cette surface, qui joue un rôle important dans l'étude du complexe, peut se mettre sous ces deux formes

$$0 = \sum \frac{(a, E)^2}{I_a - \frac{m}{I_E} I'_a}, \quad 0 = \sum \frac{(a, E)^2}{\frac{m'}{I_E} I_a - I'_a}.$$

Il est aisé de le vérifier, mais on y est conduit par la considération suivante. Soit F un plan qui touche les surfaces ( $\varphi$ ) et ( $-\varphi$ ); il y a une troisième surface du système qui touche ce plan, et son paramètre  $\varphi'$  est déterminé par la relation

$$\varphi - \varphi + \varphi' = \frac{m}{I_F},$$

en écrivant, dans  $m$ , F au lieu de E. Ainsi cette troisième surface a pour équation

$$0 = \sum \frac{(a, E)^2}{I_a - \frac{m'}{I_F} I'_a};$$

mais puisque, en faisant varier le plan F, on peut faire en sorte que cette surface touche tous les plans tangents communs aux surfaces ( $\varphi$ ) et ( $-\varphi$ ), il est évident qu'en remplaçant le plan F par le plan variable E on obtiendra l'équation de la surface enveloppée par ces plans tangents, c'est-à-dire la première des équations écrites plus haut. La seconde s'obtient d'une manière analogue, en observant que

$$\frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi'} = \frac{m'}{I_F},$$

en remplaçant dans  $m'$  le plan E par le plan F.

Si l'on désigne par  $e$  et  $f$  deux points quelconques pris sur la droite  $\varepsilon$ , on a

$$l.e\overline{f}^2 = \sum \left| \begin{array}{cc} (e, A) & (f, A) \\ (e, B) & (f, B) \end{array} \right|^2 \frac{I_a I'_b + I_b I'_a}{(a, A)^2 (b, B)^2}.$$

Cette relation peut s'écrire sous la forme très-simple  
(151)

$$l.e\overline{f}^2 = I_e I'_f + I_f I'_e - 2I_{ef} I'_{ef}.$$

Si le point  $f$  est un point fixe donné,

$$I_e I'_f - I_f I'_e = 0$$

est l'équation de la surface qui passe par la courbe  $SS'$  et par le point  $f$ ; son paramètre  $\varphi$  est égal à  $\frac{I_f}{I'_f}$ ; par conséquent,

$$I_e I'_f + I_f I'_e = 0$$

est l'équation de la surface qui passe par cette même courbe et dont le paramètre a pour valeur  $-\frac{I_f}{I'_f}$  ou  $-\varphi$ . D'ailleurs les équations

$$I_{ef} = 0 \quad \text{ou} \quad I'_{ef} = 0$$

représentent respectivement les plans polaires du point  $f$  par rapport aux surfaces  $S$  et  $S'$ .

D'après cela, l'équation

$$I = 0 \quad \text{ou} \quad I_e I'_f + I_f I'_e - 2I_{ef} I'_{ef} = 0$$

nous montre que, pour avoir les droites du complexe, qui passent par le point  $f$ , on construira la surface  $-\varphi$  du système dont le paramètre est égal et de signe contraire à celui de la surface du système qui passe par le point  $f$ ; on prendra ensuite les plans polaires du point  $f$  par rapport aux surfaces  $S$  et  $S'$ , et l'on fera passer un cône par le point  $f$ , et l'intersection de la surface  $-\varphi$  par l'un ou l'autre de ces plans polaires. Les arêtes de ce cône sont les droites du complexe qui passent par le point  $f$ .

170. Considérons trois surfaces  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ , passant par l'intersection  $SS'$ . On peut, d'une infinité de manières, tracer des triangles conjugués à  $S$ , dont les sommets  $a, b, c$  soient situés respectivement sur les surfaces  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ . Prenons le pôle  $d$  du plan  $abc$  par rapport à  $S$ ; nous formons ainsi un tétraèdre  $abcd$  conjugué à  $S$ , et nous savons alors (68,  $b$ ) que  $\sum \frac{I'_a}{I_c} = \text{const.}$

Or, si  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  sont les paramètres des surfaces  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ , on a

$$I_a - \varphi_1 I'_a = 0, \quad I_b - \varphi_2 I'_b = 0, \quad I_c - \varphi_3 I'_c = 0,$$

de sorte que, les trois premiers rapports qui figurent dans l'expression écrite ci-dessus étant constants, le quatrième  $\frac{I'_d}{I_d}$  est aussi constant, et par conséquent (158) le point  $d$  décrit une surface  $\Phi_4$  qui passe aussi par la courbe  $SS'$ . Nous connaissons huit points de la surface  $S$ ; car, si nous menons un plan  $E$  qui touche les trois surfaces  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ , les points de contact déterminent (154) un triangle conjugué à  $S$ ; donc le pôle de ce plan  $E$ , par rapport à  $S$ , sera sur la surface  $\Phi_4$ . De là ce théorème :

*Quatre surfaces  $S, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  passant par les mêmes points, si les sommets  $a, b, c$  d'un triangle conjugué à  $S$  sont situés respectivement sur les surfaces  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ , le pôle du plan  $abc$  pris par rapport à  $S$  décrira une surface  $\Phi_4$ , qui passera par les points communs aux surfaces données et par les pôles (par rapport à  $S$ ) des huit plans tangents communs aux surfaces  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ .*

D'où le suivant :

*Quatre surfaces  $S, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  passant par les mêmes points, si les sommets  $a, b, c$  d'un triangle conjugué à  $S$  sont situés respectivement sur les surfaces  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ , le plan de ce triangle enveloppera une surface  $\Sigma$  qui touchera les huit plans tangents communs aux surfaces  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  et qui sera inscrite à la développable formée par les plans menés à la surface  $S$  en ses points d'intersection avec les autres surfaces.*

Cette surface  $\Sigma$  est d'ailleurs conjuguée au tétraèdre autopolaire des surfaces données.

COROLLAIRES. — 1° *Lorsque quatre surfaces  $S$ ,  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ ,  $\Phi_3$  passent par les mêmes points, on peut construire une surface  $\Sigma$  qui touche les huit plans tangents communs aux surfaces  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ ,  $\Phi_3$ , ainsi que les plans tangents de  $S$  menés en ses points d'intersection avec les autres surfaces.*

2° *On prend pour  $S$  un cône. Étant donnés trois surfaces  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ ,  $\Phi_3$  et un cône ayant la même courbe d'intersection, si l'on prend sur ces surfaces respectivement trois points  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , tels que les droites  $da$ ,  $db$ ,  $dc$ , menées au sommet  $d$  du cône, soient des diamètres conjugués de ce cône, le plan  $abc$  enveloppera une surface  $\Sigma$  qui sera inscrite au cône et qui touchera les huit plans tangents communs aux surfaces données.*

Si, dans ce corollaire, on prend pour cône celui qui, ayant pour sommet le centre de  $\Phi_1$ , passe par le cercle imaginaire de l'infini, nos surfaces sont homocycliques, et nous voyons que :

*Étant données trois surfaces homocycliques  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ ,  $\Phi_3$ , si l'on prend sur chacune d'elles des points  $a$ ,  $b$ ,  $c$  tels que le trièdre  $oabc$ , dont le sommet est au centre commun  $o$ , soit trirectangle en  $o$ , le plan  $abc$  enveloppera une sphère qui touchera les huit plans tangents communs aux surfaces données.*