

CASORATI

Sur les coordonnées des points et des droites dans le plan, des points et des plans dans l'espace

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 17 (1878), p. 5-20

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__5_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1878, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOUVELLES ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES.

SUR LES COORDONNÉES DES POINTS ET DES DROITES
DANS LE PLAN, DES POINTS ET DES PLANS DANS
L'ESPACE (*);

PAR M. CASORATI,
Professeur à l'Université de Pavie.

(Traduction de l'italien par un Abonné.)

Pour exposer les fondements de la Géométrie analytique du plan, en considérant simultanément comme élément générateur de la figure le point et la droite, quelques auteurs prennent tout d'abord comme coordonnées de la droite les deux coordonnées plückériennes et les emploient en même temps que les coordonnées cartésiennes, dont ils veulent naturellement se servir avant de parler des coordonnées homogènes. Ces deux systèmes de coordonnées ne donnent pas toujours des formules correspondantes de même nature analytique, et l'on en conclut que les coordonnées cartésiennes ne

(*) Cette étude a été inspirée par la lecture de l'opinion émise à la page 61 des *Vorlesungen über Geometrie* von A. CLEBSCH; bearbeitet und herausgegeben von Dr F. Lindemann, 1875-1876.

peuvent se concilier entièrement avec le principe de la dualité. Il me semble que cette conclusion n'est pas licite et que le fait qui y donne lieu ne prouve qu'une chose, c'est que les coordonnées plückériennes ne sont pas en corrélation parfaite avec les coordonnées cartésiennes.

Il me semble très-facile de transformer géométriquement, suivant la loi de la dualité, la conception ordinaire des coordonnées cartésiennes en un système de coordonnées pour la droite, qui est préférable au système plückérien.

Les élèves trouveront sans doute quelque intérêt à cette Note, où je considère aussi les coordonnées homogènes pour les points et les droites dans le plan et pour les points et les plans dans l'espace; car les idées qui conduisent du système cartésien au système corrélatif que nous avons en vue s'appliquent aussi à ces coordonnées et avec une égale simplicité.

§ I. — *Coordonnées du point et de la droite dans le plan.*

1. Considérons d'abord les éléments, points et droites, du plan. Les coordonnées du point (cartésiennes ou homogènes) sont des nombres propres à déterminer les droites parallèles aux droites fondamentales (axes des coordonnées cartésiennes ou côtés du triangle fondamental) qui déterminent le point, leur élément commun.

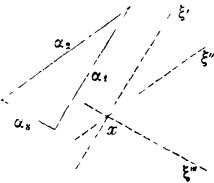
Nous dirons donc que les coordonnées de la droite sont des nombres propres à déterminer des points qui, à leur tour, déterminent la droite, leur élément commun; ces points étant, par rapport aux points fondamentaux, dans la relation corrélatif au parallélisme entre les droites.

2. Deux droites sont dites *parallèles* quand leur élément, ou point commun, appartient à une droite ε fixée d'une manière particulière (la droite à l'infini). Deux points seront donc entre eux dans la relation corrélatrice au parallélisme quand leur élément commun, c'est-à-dire la droite qui les joint, passe par un point e fixé d'une manière particulière. Nous pourrons exprimer cette relation en disant que *les points sont alignés sur e* .

3. Par suite, en laissant de côté, pour le moment, le cas des deux coordonnées, et en ne considérant que celui de trois coordonnées, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ étant les droites fondamentales, et a_1, a_2, a_3 les points fondamentaux, nous dirons que :

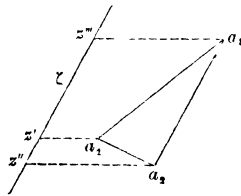
Les coordonnées d'un point x (fig. 1) sont les trois nombres ξ', ξ'', ξ''' | Les coordonnées d'une droite ζ (fig. 2) sont les trois nombres z', z'', z'''

Fig. 1.



propres à déterminer les droites ξ', ξ'', ξ''' qui passent par x et qui sont parallèles aux droites $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (c'est-à-dire telles que les points $\alpha_1 \xi', \alpha_2 \xi'', \alpha_3 \xi'''$ soient sur la droite ε).

Fig. 2.



propres à déterminer les points z', z'', z''' qui appartiennent à ζ et qui sont alignés avec a_1, a_2, a_3 (c'est-à-dire tels que les droites $\alpha_1 z', \alpha_2 z'', \alpha_3 z'''$ passent par le point e).

On pourra nommer ξ', ξ'', ξ''' les éléments coordonnés du point x , et z', z'', z''' les éléments coordonnés de la droite ζ .

4. Les définitions que nous venons de donner ne sont pas encore complètes; nous les compléterons au moyen de quelques déterminations particulières convenablement choisies. Dans ces définitions figurent quatre droites fixes quand il s'agit des coordonnées des points, et quatre points fixes pour les coordonnées des droites. Les quatre éléments d'une espèce étant fixés arbitrairement, on peut encore fixer arbitrairement les quatre éléments de l'autre espèce (*). Mais, afin d'obtenir la plus grande simplicité possible pour traiter simultanément les questions au moyen des coordonnées de l'une et de l'autre espèce, il est utile de disposer convenablement les éléments d'une espèce par rapport à ceux de l'autre. Dans ce but, nous ferons coïncider le triangle $a_1 a_2 a_3$ avec le trilatère $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$, et nous ferons passer le point e à l'infini dans une direction fixée d'une manière quelconque, sur laquelle il est important de distinguer les deux sens, que nous désignerons par $+e$ et $-e$; la droite ε est aussi à l'infini.

Cela posé, nos définitions seront complètes en disant :

Les coordonnées sont les mesures, prises toutes sur une même direction e , de ce que nous nommerons les intervalles entre chaque élément coordonné et l'élément fondamental correspondant (droite parallèle ou point aligné), en tenant compte du signe positif quand le passage fini de l'élément fondamental à l'élément coordonné se fera dans le sens $+e$ pour

(*) Ici, il est vrai, une des droites ε a été placée à l'avance à l'infini. Mais si, au lieu du parallélisme, on s'inspirait de la condition plus générale de faire couper les éléments coordonnés ξ', ξ'', ξ''' et les éléments fondamentaux $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sur une droite fixée arbitrairement, les définitions précédentes pourraient être conservées sans changement, mais il n'en serait pas de même des formules qui en découlent.

les points, — e pour les droites, et du signe négatif dans les cas contraires.

En conservant la direction commune des mesures et la distinction entre les sens positif et négatif, nous pourrons dire encore que :

Les coordonnées du point x sont les mesures des intervalles entre x et les points x' , x'' , x''' alignés avec x et qui appartiennent aux droites fondamentales (fig. 3).

Les coordonnées de la droite ζ sont les mesures des intervalles entre ζ et les droites ζ' , ζ'' , ζ''' parallèles à ζ et tracées par les points fondamentaux (fig. 4).

Fig. 3.

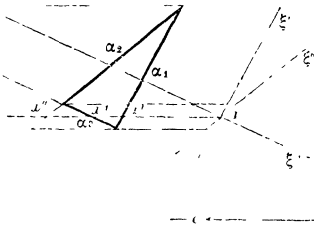
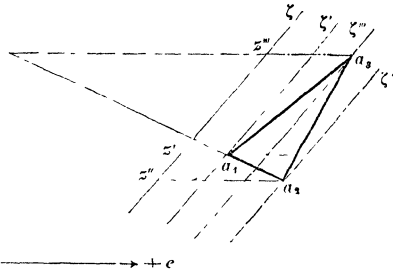


Fig. 4.



Dans les figures ci-dessus, les coordonnées sont toutes positives pour le point x et pour la droite ζ .

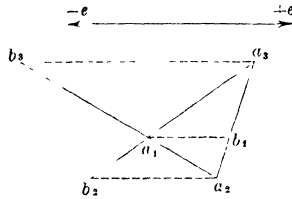
Nous emploierons, pour désigner les coordonnées d'un point ou d'une droite, le symbole même du point ou de la droite accompagné des indices 1, 2, 3, toutes les fois que cela ne sera pas incommode. Pour le point x et pour la droite ζ des figures précédentes, nous écrirons

$$\begin{aligned} x_1 &= + \overline{x'x}, & \zeta_1 &= + \overline{a_1z'}, \\ x_2 &= + \overline{x''x}, & \zeta_2 &= + \overline{a_2z''}, \\ x_3 &= + \overline{x'''x}; & \zeta_3 &= + \overline{a_3z'''}; \end{aligned}$$

et \overline{pq} désignera la mesure absolue de l'intervalle entre p et q .

5. Tout point fondamental a deux coordonnées égales à zéro, et la troisième égale à une des hauteurs du triangle fondamental prises dans la direction e (fig. 5). La

Fig. 5.



même remarque est vraie pour chacune des droites fondamentales. Désignons ces trois hauteurs avec les signes qui leur appartiennent comme coordonnées des sommets, ou, ce qui revient au même, comme coordonnées des côtés, par h_1, h_2, h_3 ; nous aurons les tableaux suivants (*):

Coordonnées des points	Coordonnées des droites
$a_1, a_2, a_3.$	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3.$
(1) $\left\{ \begin{array}{l} h_1, 0, 0, \\ 0, h_2, 0, \\ 0, 0, h_3, \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} h_1, 0, 0, \\ 0, h_2, 0, \\ 0, 0, h_3. \end{array} \right.$

Dans le cas de la fig. 5, on aura

$$h_1 = -\overline{b_1 a_1}, \quad h_2 = +\overline{b_2 a_2}, \quad h_3 = -\overline{b_3 a_3}.$$

(*) Ces tableaux paraissent identiques. Mais, pour une position quelconque du triangle par rapport au trilatère, l'un ne coïnciderait avec l'autre qu'après une rotation autour de la diagonale, comme on le voit ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc|c} a_1 & a_2 & a_3 & \alpha_1 \\ h_{11} & h_{21} & h_{31} & \alpha_1 \\ h_{12} & h_{22} & h_{32} & \alpha_2 \\ h_{13} & h_{23} & h_{33} & \alpha_3 \end{array}$$

Mêmes observations pour les tableaux suivants, (2), etc.

6. Les figures qui précèdent donnent aussi immédiatement les tableaux suivants pour les coordonnées des éléments coordonnés du point x et de la droite ζ .

Coordonnées des droites			Coordonnées des points			
ξ' .	ξ'' .	ξ''' .	z' .	z'' .	z''' .	
(7) {	$h_1 - x_1,$	$-x_2,$	$-x_3,$	$h_1 - \zeta_1,$	$-\zeta_2,$	$-\zeta_3,$
	$-x_1,$	$h_2 - x_2,$	$-x_3,$	$-\zeta_1,$	$h_2 - \zeta_2,$	$-\zeta_3,$
	$-x_1,$	$-x_2,$	$h_3 - x_3,$	$-\zeta_1,$	$-\zeta_2,$	$h_3 - \zeta_3.$

7. Nous avons fixé non-seulement les rapports, mais les grandeurs effectives des trois coordonnées d'un élément, afin de pouvoir établir la relation qui existe entre elles. On peut exprimer immédiatement cette relation, pour les deux espèces de coordonnées, sous la forme (*)

$$(3) \quad \frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} = 1, \quad \frac{\zeta_1}{h_1} + \frac{\zeta_2}{h_2} + \frac{\zeta_3}{h_3} = 1.$$

8. Les coordonnées d'un point x situé, d'une manière quelconque, sur la droite commune aux points t, u peuvent être exprimées ainsi :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{lt_1 + mu_1}{l + m}, \\ x_2 = \frac{lt_2 + mu_2}{l + m}, \\ x_3 = \frac{lt_3 + mu_3}{l + m}. \end{array} \right.$$

Le rapport $\frac{l}{m}$ dépend seulement de x .

8. Les coordonnées d'une droite ζ passant, d'une manière quelconque, par le point commun aux droites φ, χ peuvent être exprimées ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta_1 = \frac{\lambda\varphi_1 + \mu\chi_1}{\lambda + \mu}, \\ \zeta_2 = \frac{\lambda\varphi_2 + \mu\chi_2}{\lambda + \mu}, \\ \zeta_3 = \frac{\lambda\varphi_3 + \mu\chi_3}{\lambda + \mu}, \end{array} \right.$$

Le rapport $\frac{\lambda}{\mu}$ dépend seulement de ζ .

(*) En prenant comme coordonnées les rapports des coordonnées

9. Il résulte immédiatement des équations (2) et (4) que :

La condition pour que le point x soit sur la droite ζ est | La condition pour que la droite ζ passe par le point x est

$$(5) \quad \frac{\zeta_1 x_1}{h_1} + \frac{\zeta_2 x_2}{h_2} + \frac{\zeta_3 x_3}{h_3} = 0.$$

Cette équation linéaire, homogène et symétrique par rapport aux coordonnées du point et de la droite, peut être utilement qualifiée d'*équation représentatrice du point et de la droite réunis*.

10. Nous ne continuerons pas l'exposition systématique des formules en coordonnées particulières; nous allons reprendre la définition plus générale donnée au n° 3, et nous la compléterons avec la généralité voulue.

Nous nous sommes contenté, au n° 3, de dire que les coordonnées (du point ou de la droite) *doivent être propres* à déterminer les éléments coordonnés (du point ou de la droite); mais nous n'avons pas précisé de quelle manière elles doivent remplir ce but. Nous ajouterons, à cet effet, que *les coordonnées doivent être proportionnelles aux produits de constantes fixées à l'avance par les coordonnées particulières que nous venons de considérer*.

Par suite, en conservant la même position relative du triangle et du trilatère fondamentaux, ainsi que les notations déjà employées, et en désignant par $h_1, h_2, h_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ six nombres fixés arbitrairement, et par $X_1,$

deja prises aux valeurs de h y relatives (rapports qui pour les x sont independants de la direction), les coordonnees de chaque élément fondamental seraient ou nulles, ou égales à l'unité, et les équations (3) prendraient la forme $x_1 + x_2 + x_3 = 1, \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 = 1, \dots$

X_2, X_3, Z_1, Z_2, Z_3 les nouvelles coordonnées du point x et de la droite ζ , la définition de ces coordonnées est complète et la plus générale par rapport à un triangle fondamental donné, et nous pourrons les résumer dans les formules suivantes :

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \rho X_1 = k_1 x_1, & \sigma Z_1 = \lambda \zeta_1, \\ \rho X_2 = k_2 x_2, & \sigma Z_2 = \lambda \zeta_2, \\ \rho X_3 = k_3 x_3; & \sigma Z_3 = \lambda \zeta_3; \end{array} \right.$$

où ρ et σ désignent des facteurs qui restent complètement indéterminés.

Cette définition, qui laisse indéterminée la grandeur de chaque coordonnée, pour ne déterminer que la valeur de leurs rapports, correspond bien au principe de l'homogénéité, que nous introduisons dans toutes les formules et équations par l'usage de trois coordonnées. Pour ce motif, nous nommerons $X_1, X_2, X_3, Z_1, Z_2, Z_3$ *coordonnées homogènes*.

L'équation qui représente une droite et un point réunis devient, avec les nouvelles coordonnées,

$$(7) \quad \frac{Z_1 X_1}{h_1 k_1 \lambda_1} + \frac{Z_2 X_2}{h_2 k_2 \lambda_2} + \frac{Z_3 X_3}{h_3 k_3 \lambda_3} = 0.$$

Comme il importe que cette équation prenne la forme très-simple

$$(8) \quad Z_1 X_1 + Z_2 X_2 + Z_3 X_3 = 0,$$

nous poserons la relation suivante entre les deux ternes de constantes k et λ :

$$(9) \quad h_1 k_1 \lambda_1 = h_2 k_2 \lambda_2 = h_3 k_3 \lambda_3.$$

Remarquons que la liaison que nous établissons entre les constantes s'exprime avec la plus grande simplicité.

11. Nous savons déjà que les formules, pour la transformation simultanée des coordonnées $X_1, X_2, X_3, Z_1, Z_2, Z_3$, relatives à un triangle $a_1 a_2 a_3$, en d'autres relatives à un nouveau triangle fondamental, sont linéaires et entières, et que celles qui se rapportent aux coordonnées des droites ont pour coefficients les éléments adjoints aux éléments constitués par les coefficients des formules relatives aux coordonnées des points, ou réciproquement.

Nous ne nous occuperons donc pas de ces formules, mais nous chercherons celles qui s'appliquent au cas de deux coordonnées.

Dans ce cas, nous n'avons que deux droites fondamentales α_1, α_2 (fig. 6) et deux points fondamentaux a_1, a_2 (fig. 7). Nous entendons maintenant par coordonnées

Fig. 6.

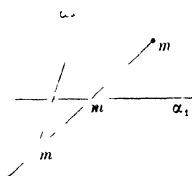
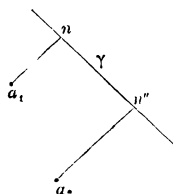


Fig. 7.



du point variable m celles qui sont représentées en $m'm$, $m''m$, et par coordonnées de la droite variable γ celles qui sont représentées en $a_1 n'$, $a_2 n''$. La direction commune de ces coordonnées est la direction donnée e . Le sens $+e$ de cette droite sera le sens positif pour les coordonnées des points, et le sens $-e$ sera le sens positif des coordonnées des droites.

Designons par x_1, x_2 les coordonnées de m , et par $z_1,$
celles du même point rap-

Designons par ξ_1, ξ_2 les coordonnées de γ , et par ζ_1, ζ_2 celles de la même droite rapportée à

porté à deux nouvelles droites fondamentales γ_1, γ_2 . La recherche des expressions des x en fonction des z peut se décomposer en deux recherches plus simples, en considérant un couple intermédiaire de droites fondamentales, le couple des droites β_1, β_2 (fig. 8),

deux nouveaux points fondamentaux c_1, c_2 . La recherche des expressions des ξ en fonction des ζ peut se décomposer en deux recherches plus simples, en considérant un couple intermédiaire de points fondamentaux, le couple des points b_1, b_2 (fig. 9), alignés sur les

Fig. 8.

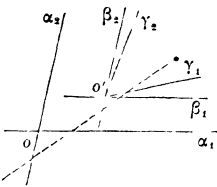
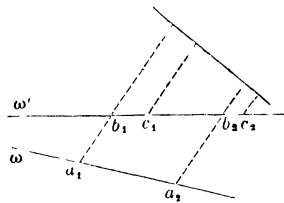


Fig. 9.



parallèles aux premières α_1, α_2 , et passant par le point o' commun aux nouvelles γ_1, γ_2 .

premiers a_1, a_2 , et ayant la droite ω' commune avec les nouveaux c_1, c_2 .

En désignant par o'_1, o'_2 les coordonnées de o' par rapport à α_1, α_2 , et par γ_1, γ_2 les coordonnées du point variable relatives à β_1, β_2 , la figure nous donnera immédiatement

En désignant par ω'_1, ω'_2 les coordonnées de ω' par rapport à a_1, a_2 , et par η_1, η_2 les coordonnées de la droite variable relatives à b_1, b_2 , la figure nous donnera immédiatement

$$(10) \quad \begin{cases} x_1 = o'_1 + \gamma_1, \\ x_2 = o'_2 + \gamma_2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi_1 = \omega'_1 + \eta_1, \\ \xi_2 = \omega'_2 + \eta_2. \end{cases}$$

Telles sont les formules qui servent à passer d'un couple de droites ou points fondamentaux à un nouveau couple de droites ou plans fondamentaux, parallèles respectivement aux premières droites ou alignés sur les premiers points.

Les mêmes figures 8 ou 9 nous donnent encore aisément les formules suivantes :

$$(11) \quad \begin{cases} y_1 = k_{11} z_1 + k_{12} z_2, & \eta_1 = x_{11} \zeta_1 + x_{12} \zeta_2, \\ y_2 = k_{21} z_1 + k_{22} z_2, & \eta_2 = x_{21} \zeta_1 + x_{22} \zeta_2. \end{cases}$$

Ces formules servent à passer d'un couple de droites (β_1, β_2) ou de points (b_1, b_2) fondamentaux à un autre couple de droites (γ_1, γ_2) ou de points (c_1, c_2) fondamentaux, ayant en commun avec les anciens un point (o') ou une droite (ω') .

Les coefficients k et x sont des rapports anharmoniques, comme il est indiqué dans les tableaux suivants :

Coeff.	Rapp. anharm. des droites.	Coeff.	Rapp. anharm. des points.
$k_{11} = \beta_1,$	$\gamma_1, \gamma_2, \varepsilon',$	$x_{11} = b_1,$	$c_1, c_2, e',$
$k_{12} = \beta_1,$	$\gamma_2, \gamma_1, \varepsilon',$	$x_{12} = b_1,$	$c_2, c_1, e',$
$k_{21} = \beta_2,$	$\gamma_1, \gamma_2, \varepsilon',$	$x_{21} = b_2,$	$c_1, c_2, e',$
$k_{22} = \beta_2,$	$\gamma_2, \gamma_1, \varepsilon',$	$x_{22} = b_2,$	$c_2, c_1, e',$

où ε' représente la droite commune aux points o', e .

où e' signifie le point commun aux droites ω', ε .

Chacune des coordonnées $(x_1, x_2$ ou $y_1, y_2, z_1, z_2)$, dont nous nous sommes servi dans ce numéro pour le point, ne diffère de la coordonnée cartésienne rapportée à la même droite fondamentale que par un facteur constant. On pourra donc passer, quand on voudra, de ces coordonnées aux cartésiennes, et *vice versa*, car les formules relatives aux unes se convertiront moyennant ces facteurs en celles qui sont relatives aux autres.

Il est aisé de reconnaître que les coordonnées dont nous venons de nous servir dans ce numéro et dans les numéros précédents se déduisent du système général de

coordonnées projectives de M. Fiedler. Mesurant toutes les distances dans une même direction, on obtiendra le terné x_1, x_2, x_3 du n° 4, en éloignant à l'infini dans cette direction le quatrième point fondamental e et le terné $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$, en éloignant à l'infini la quatrième droite fondamentale. On obtiendra aussi le couple x_1, x_2 de ce numéro en éloignant à l'infini un des côtés du triangle fondamental, et le couple ξ_1, ξ_2 en éloignant à l'infini un des sommets du trilatère. Il est bien entendu que, dans ce cas, on ne fait coïncider le triangle et le trilatère qu'après cette transformation. Cette manière de particulariser la définition de M. Fiedler nous semble plus conforme à l'esprit de la dualité géométrique que l'emploi des coordonnées cartésiennes pour le point, et plückériennes pour la droite. Il ne suffit pas, pour préférer les coordonnées plückériennes aux précédentes ξ_1, ξ_2 , que leur combinaison avec les coordonnées cartésiennes donne une forme plus simple à l'équation du point et de la droite réunis. D'ailleurs nous nous proposons de montrer ailleurs la grande utilité de nos coordonnées.

§ II. — *Coordonnées des points et des plans dans l'espace à trois dimensions.*

1. Les définitions de la première Section s'étendent immédiatement au cas des points et des plans dans l'espace.

Puisque le parallélisme des plans consiste en ce qu'ils ont une droite commune située dans un plan ε fixé d'une manière particulière (à l'infini), la disposition corrélative des points doit consister en ce qu'ils ont en commun une droite passant par un point e , fixée d'une manière particulière.

2. Nous dirons donc que :

Les (trois ou quatre) coordonnées d'un point x sont des nombres propres à déterminer les (trois ou quatre) plans ξ' , ξ'' , ... qui passent par x , et qui sont parallèles respectivement aux (trois ou quatre) plans fondamentaux $\alpha_1, \alpha_2, \dots$	Les (trois ou quatre) coordonnées d'un plan ζ sont des nombres propres à déterminer les (trois ou quatre) points z' , z'' , ... qui se trouvent dans ζ et alignés respectivement avec les (trois ou quatre) points fondamentaux a_1, a_2, \dots
--	---

L'alignement doit s'entendre, comme ci-dessus, sur un point fixe e .

Les plans ξ' , ξ'' , ... pourront être nommés *éléments coordonnés du point x* , et les points z' , z'' , ... *éléments coordonnés du plan ζ* .

3. Ici encore nous éloignerons à l'infini, dans une direction fixée arbitrairement, le point e et le plan ϵ , et, sur cette direction fixe, nous distinguerons les deux sens $+e$, $-e$, et nous compléterons la définition des coordonnées en disant que *les (trois ou quatre) coordonnées sont les mesures prises, dans la direction e , des intervalles entre chaque élément coordonné et l'élément fondamental correspondant (parallèle ou aligné), en tenant compte du signe positif quand le passage fini de l'élément fondamental à l'élément coordonné se fera pour les points dans le sens $+e$ et pour les plans dans le sens $-e$, et du signe négatif dans les cas contraires.*

En ne changeant rien à la direction et au sens des mesures, on peut encore dire que :

Les coordonnées du point x sont les mesures des intervalles entre x et les points x' , x'' , ... alignés sur x et qui appartiennent aux plans fondamentaux.	Les coordonnées du plan ζ sont les mesures des intervalles entre ζ et les plans ξ' , ξ'' , ... parallèles à ζ et qui passent par les points fondamentaux.
---	---

4. Bornons-nous au cas des quatre coordonnées, en les désignant par x_1, x_2, x_3, x_4 pour le point x , et par $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ pour le plan ζ , et faisons coïncider le tétragone $a_1 a_2 a_3 a_4$ avec le tétraèdre $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$.

Chaque point ou plan fondamental aura trois coordonnées nulles, et la quatrième égale à une des quatre hauteurs du tétraèdre fondamental, hauteur prise dans la direction des mesures. En indiquant ces hauteurs avec les signes qui leur conviennent comme coordonnées des points fondamentaux par h_1, h_2, h_3, h_4 , nous aurons pour les :

Coordonnées des points	Coordonnées des plans
$a_1. \quad a_2. \quad a_3. \quad a_4.$	$\alpha_1. \quad \alpha_2. \quad \alpha_3. \quad \alpha_4.$
$h_1, \quad 0, \quad 0, \quad 0,$	$h_1, \quad 0, \quad 0, \quad 0,$
$0, \quad h_2, \quad 0, \quad 0,$	$0, \quad h_2, \quad 0, \quad 0,$
$0, \quad 0, \quad h_3, \quad 0,$	$0, \quad 0, \quad h_3, \quad 0,$
$0, \quad 0, \quad 0, \quad h_4,$	$0, \quad 0, \quad 0, \quad h_4,$

(1) {

Pour les éléments coordonnés du point x et du plan ζ , nous aurons

Coordonnées des plans	Coordonnées des points
$\xi'. \quad \xi''. \quad \xi'''. \quad \xi^{IV}.$	$x'. \quad x''. \quad x'''. \quad x^{IV}.$
$h_1 - x_1, \quad -x_2, \quad -x_3, \quad -x_4,$	$h_1 - \zeta_1, \quad -\zeta_2, \quad -\zeta_3, \quad -\zeta_4,$
$-x_1, \quad h_2 - x_2, \quad -x_3, \quad -x_4,$	$-\zeta_1, \quad h_2 - \zeta_2, \quad -\zeta_3, \quad -\zeta_4,$
$-x_1, \quad -x_2, \quad h_3 - x_3, \quad -x_4,$	$-\zeta_1, \quad -\zeta_2, \quad h_3 - \zeta_3, \quad -\zeta_4,$
$-x_1, \quad -x_2, \quad -x_3, \quad h_4 - x_4,$	$-\zeta_1, \quad -\zeta_2, \quad -\zeta_3, \quad h_4 - \zeta_4.$

2 {

6. Nous avons la relation suivante :

Entre les coordonnées d'un point quelconque x :	Entre les coordonnées d'un plan quelconque ζ :
(3) $\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} + \frac{x_4}{h_4} = 1.$	$\frac{\zeta_1}{h_1} + \frac{\zeta_2}{h_2} + \frac{\zeta_3}{h_3} + \frac{\zeta_4}{h_4} = 1.$

7. On peut exprimer de la manière suivante :

Les coordonnées d'un point x , situé d'une manière quelconque dans le plan contenant les trois points t, u, v :

$$(4) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{lt_1 + mu_1 + nv_1}{l + m + n}, \\ x_2 = \frac{lt_2 + mu_2 + nv_2}{l + m + n}, \\ x_3 = \frac{lt_3 + mu_3 + nv_3}{l + m + n}, \\ x_4 = \frac{lt_4 + mu_4 + nv_4}{l + m + n}, \end{cases}$$

où les rapports $l : m : n$ ne dépendent que de x .

Les coordonnées d'un plan ζ qui passe, d'une manière quelconque, par le point appartenant aux plans φ, χ, ψ :

$$\begin{cases} \zeta_1 = \frac{\lambda\varphi_1 + \mu\chi_1 + \nu\psi_1}{\lambda + \mu + \nu}, \\ \zeta_2 = \frac{\lambda\varphi_2 + \mu\chi_2 + \nu\psi_2}{\lambda + \mu + \nu}, \\ \zeta_3 = \frac{\lambda\varphi_3 + \mu\chi_3 + \nu\psi_3}{\lambda + \mu + \nu}, \\ \zeta_4 = \frac{\lambda\varphi_4 + \mu\chi_4 + \nu\psi_4}{\lambda + \mu + \nu}, \end{cases}$$

où les rapports $\lambda : \mu : \nu$ ne dépendent que de ζ .

8. Des expressions (4) et (3) nous déduisons immédiatement que :

La condition pour que le point x soit sur le plan ζ est | La condition pour que le plan ζ passe par le point x est

$$\frac{x_1 \zeta_1}{h_1} + \frac{x_2 \zeta_2}{h_2} + \frac{x_3 \zeta_3}{h_3} + \frac{x_4 \zeta_4}{h_4} = 0,$$

équation que l'on pourra nommer *représentatrice du point et du plan réunis*.