Nouvelles annales de mathématiques

Questions

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 526-528

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__526_0>

QUESTIONS.

1295. Démontrer :

1° Que, si une solution de l'équation indéterminée

$$u^3 + v^3 + x^3 + y^3 = 0$$

est donnée par l'égalité

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 = 0,$$

on obtient une nouvelle solution en faisant

$$\begin{aligned} u &= \alpha(\beta + \gamma + \delta) - \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2, \\ v &= \beta(\alpha + \gamma + \delta) - \alpha^2 + \gamma^2 - \delta^2, \\ x &= \gamma(\alpha + \beta + \delta) - \alpha^2 + \beta^2 - \delta^2, \\ y &= \delta(\alpha + \beta + \gamma) + \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2. \end{aligned}$$

2° Que, si l'on part de cette seconde solution pour en obtenir une troisième par le même procédé, on retombera, à un facteur commun près, sur les valeurs $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

(S. Realis.)

1296. Si les égalités

$$A\alpha^3 + B\beta^3 + C\gamma^3 = 0, \quad A\alpha'^3 + B\beta'^3 + C\gamma'^3 = 0$$

représentent deux solutions connues, distinctes, de l'équation

$$Ax^3 + By^3 + Cz^3 = 0,$$

une troisième solution sera donnée par les formules

$$\begin{aligned} x &= B\beta\beta'(\alpha\beta' - \alpha'\beta) + C\gamma\gamma'(\alpha\gamma' - \alpha'\gamma), \\ y &= C\gamma\gamma'(\beta\gamma' - \beta'\gamma) - A\alpha\alpha'(\beta\alpha' - \beta'\alpha), \\ z &= A\alpha\alpha'(\gamma\alpha' - \gamma'\alpha) + B\beta\beta'(\gamma\beta' - \gamma'\beta). \end{aligned}$$

(S. Realis.)

1297. Décomposer le quadruple et le carré de $4p^6 + 27q^6$ en une somme de deux cubes.

(Édouard Lucas.)

1298. Décomposer le nombre $x^{12} - 9.y^{12}$, et son double, en une somme de deux cubes.

(Édouard Lucas.)

1299. La somme des carrés des x premiers nombres entiers n'est jamais égale au double, au triple, au sextuple d'un carré. (Édouard Lucas.)

1300. La somme des x premiers nombres triangulaires n'est jamais égale au double, au triple, au sextuple d'un carré. (Édouard Lucas.)

1301. Dans un segment d'une conique quelconque, inscrire le trapèze maximum; la corde qui limite le segment devant être une des bases du trapèze.

(F. Gabriel-Marie.)

1302. Dans une conique à centre, inscrire le quadrilatère maximum ayant pour un de ses côtés un diamètre donné, et pour côté opposé une corde parallèle à une droite donnée. (F. Gabriel-Marie.)

1303. Trouver toutes les solutions entières de l'équation $x^2 + 7x = 2y(y + 3)(y^2 + 3y + 5)$.

(Lionnet.)

1304. La somme des distances du cercle circonscrit, aux deux côtés AB, AC du triangle inscrit ABC, est égale à la corde menée par le point C, perpendiculairement à AC dans le cercle décrit sur DC, comme diamètre; D étant le milieu de l'arc BC. (A. Cambier.)

1305. On donne un faisceau F_n de courbes de l'ordre n et une droite d; chaque point D de d détermine une courbe de F_n. Démontrer que l'enveloppe de la tangente en D, à la courbe déterminée par ce point, est de la classe $2n - 1$, de l'ordre $4(n - 1)$; que la droite d est une tangente multiple de l'ordre $2(n - 1)$; que la courbe a $4(n - 2)(n - 3)$ points doubles, $3(2n - 3)$ points de rebroussement, qu'elle n'a aucun point d'inflexion; que les tangentes en $(n - 1)$ points de rebroussement passent par les $(n - 1)$ points qui correspondent à l'infini dans l'involution que les courbes du faisceau F_n marquent sur la droite d.

Examiner le cas où k points de la base de F_n se trouvent sur la droite d.

Construire la courbe dans le cas où $n = 2$, en supposant : 1° que les quatre points de la base du faisceau des coniques se trouvent d'un même côté de la droite d; 2° que trois de ces points se trouvent d'un côté de d, et le quatrième de l'autre côté. (E. Dewulf.)

1306. On donne une conique C_2, et trois points A, B, C. Par chaque point P de C_2 passe une conique circonscrite au triangle ABC, et tangente à C_2 en P, et chacune de ces coniques coupe la conique fixe en deux autres points M, N.

L'enveloppe de la droite MN est de la quatrième classe, du sixième ordre; elle n'a pas de point d'inflexion; elle est doublement tangente aux côtés du triangle ABC; elle a quatre points doubles, six points de rebroussement. Les tangentes de rebroussement sont les tangentes à C_2, aux six points où les côtés du triangle ABC coupent cette conique. (E. Dewulf.)