Nouvelles annales de mathématiques

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 523-525
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__523_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES

Question 1286

(voir 2ᵉ série, t. XVII, p. 432);

PAR M. P. TERRIER.

Deux droites de même longueur, OA, OB, *et un point* P *sont donnés, une droite mobile, passant par le point* P, *coupe* OA *en* A_1 *et* OB *en* B_1. *On décrit deux cercles ayant pour centres* A_1 *et* B_1, *et passant respectivement par* A *et* B. *Trouver le lieu géométrique des points communs à ces deux cercles.* (DROZ.)

Les droites a et b tangentes au cercle OA en A et B, et la corde MN (réelle ou idéale) commune aux cercles A_1 et B_1, sont les axes radicaux des cercles O, A_1 et B_1, considérés deux à deux. La corde MN passe donc par le point d'intersection Q des tangentes a et b, et la puissance de ce point, par rapport aux points M, N, est égale au carré de QA. Le lieu des points M, N est donc un cercle qui a son centre au point P, avec lequel les centres A_1 et B_1 sont alignés.

Note. Autres solutions de MM. Moret-Blanc; Fillon, répétiteur au lycée du Havre; Jean Griess; C. Yagane; Fauquembergue.

Question 1290

(voir 2ᵉ série, t. XVII, p. 479);

PAR M. J. DE VIRIEU,

Professeur à Lyon.

Soient r, r_1, r_2, r_3 les rayons des cercles tangents aux côtés d'un triangle; démontrer que

$$a+b+c=3(r^{-1}r_1r_2r_3)^{\frac{1}{2}}-(rr_1^{-1}r_2r_3)^{\frac{1}{2}}-(rr_1r_2^{-1}r_3)^{\frac{1}{2}}-(rr_1r_2r_3^{-1})^{\frac{1}{2}}.$$

(T. MITCHESON, B. A.; L. C. P.)

Les formules connues

$$s=rp,\quad s=r_1(p-a),$$
$$s=r_2(p-b),\quad s=r_3(p-c),\quad s=(rr_1r_2r_3)^{\frac{1}{2}}$$

donnent

$$p=(r^{-1}r_1r_2r_3)^{\frac{1}{2}},\quad p-a=(rr_1^{-1}r_2r_3)^{\frac{1}{2}},$$
$$p-b=(rr_1r_2^{-1}r_3)^{\frac{1}{2}},\quad p-c=(rr_1r_2r_3^{-1})^{\frac{1}{2}}.$$

Si de trois fois la première de ces quatre équations on retranche la somme des trois dernières, on a

$$a+b+c=3(r^{-1}r_1r_2r_3)^{\frac{1}{2}}-(rr_1^{-1}r_2r_3)^{\frac{1}{2}}-(rr_1r_2^{-1}r_3)^{\frac{1}{2}}-(rr_1r_2r_3^{-1})^{\frac{1}{2}}.$$

Note. Solutions analogues de MM. Ch. *Cochez*; Moret-Blanc; C. Boell, élève du lycée du Havre; E. Fauquembergue, maître répétiteur au Lycée de Saint-Quentin; Robaglia, maître répétiteur au lycée d'Alger.

Question 1292

(voir 2ᵉ série, t. XVII, p. 480);

PAR M. C. H., ABONNÉ.

Démontrer qu'il est impossible de résoudre en nombres entiers aucune des trois équations

$$(1)\qquad x_1^6+x_2^6+x_3^6+x_4^6+x_5^6+x_6^6+x_7^6=9.x_8+8,$$
$$(2)\qquad x^3+y^6=9.z+7,$$
$$(3)\qquad x^3+y^6=7.z+5.$$

(LAISANT.)

1° Il est évident, d'après l'équation (1), que les sept nombres x_1, x_2, ..., x_7 ne sont pas tous multiples de 3; car, dans ce cas, leur somme serait multiple de 9.

Or, la sixième puissance d'un nombre non divisible par 3, étant égale à un multiple de 9, augmenté de l'unité, le premier membre de l'équation (1) est nécessairement de la forme $9.n + r$, où r représente un entier moindre que 8. Donc l'équation (1) est impossible en nombres entiers.

2° Remarquons de même que, dans l'équation (2), les nombres x, y ne peuvent être tous deux multiples de 3.

Si aucun de ces nombres n'admet 3 comme facteur, on aura

$$x^3 = 9m \pm 1, \quad y^6 = 9.n + 1;$$
$$x^3 + y^6 = 9z + 2, \quad \text{ou} \quad x^3 + y^6 = 9z.$$

En supposant x divisible par 3, on a

$$x^3 + y^6 = 9z + 1.$$

Enfin, si y est multiple de 3, il en résulte

$$x^3 + y^6 = 9z \pm 1.$$

Donc, en représentant par r un nombre moindre que 9, l'équation $x^3 + y^6 = 9z + r$ n'admet de solutions entières que pour $r = 0, = 1, = 2, = 8$.

3° Le cube d'un nombre premier avec 7, étant égal à un multiple de 7, augmenté ou diminué de l'unité, le premier membre, $x^3 + y^6$, de l'équation (3) ne peut avoir que l'une de ces formes :

$$7z, \quad 7z + 1, \quad 7z + 2, \quad 7z + 6.$$

Et, par conséquent, aucune des équations

$$x^3 + y^6 = 7z + 3, \quad = 7z + 4, \quad = 7z + 5$$

n'admet de solution entière.

Note. La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.