

**Note sur la résolution en nombres entiers
et positifs du système des deux équations
indéterminées $x = 4y^2 + 1$, $x^2 = z^2 + (z + 1)^2$**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 17
(1878), p. 521-523

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__521_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1878, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**NOTE SUR LA RÉOLUTION EN NOMBRES ENTIERS ET POSITIFS
DU SYSTÈME DES DEUX ÉQUATIONS INDÉTERMINÉES**

$$x = 4y^2 + 1, \quad x^2 = z^2 + (z + 1)^2;$$

1. La question posée par M. Catalan (p. 518, 2^o) conduit à ces équations; car, en nommant $2x$ un nombre remplissant les conditions énoncées, et y, z d'autres nombres entiers, on aura

$$(1) \quad \begin{aligned} 2x &= (2y - 1)^2 + (2y + 1)^2 = 8y^2 + 2; \\ x &= 4y^2 + 1. \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} 4x^2 &= (2z)^2 + (2z + 2)^2 = 8z^2 + 8z + 4; \\ x^2 &= z^2 + (z + 1)^2. \end{aligned}$$

2. L'équation

$$(2) \quad x^2 = z^2 + (z + 1)^2$$

donne, en supposant z impair,

$$x = \alpha^2 + \beta^2, \quad z = \alpha^2 - \beta^2, \quad z + 1 = 2\alpha\beta,$$

où α et β désignent des nombres entiers, premiers entre eux, et liés par la relation

$$(3) \quad \beta^2 + 2\alpha\beta - \alpha^2 = 1,$$

qui exige que α soit pair et β impair.

D'autre part, chacune des deux expressions $\alpha^2 + \beta^2$ et $4y^2 + 1$ représentant la valeur de x , on a

$$(4) \quad \alpha^2 + \beta^2 = 4y^2 + 1,$$

et en retranchant, membre à membre, l'équation (3) de l'équation (4), il vient

$$2\alpha^2 - 2\alpha\beta = 4y^2; \quad \alpha(\alpha - \beta) = 2y^2.$$

Mais α et $\alpha - \beta$ sont premiers entre eux; de plus, α est pair et $\alpha - \beta$ impair; donc $\alpha = 2p^2$, $\alpha - \beta = q^2$,

$\beta = 2p^2 - q^2$, où p et q sont des nombres entiers.

Au moyen de la substitution de $2p^2$ et $2p^2 - q^2$ à α et β , l'équation (3) devient

$$(2p^2 - q^2)^2 + 4p^2(2p^2 - q^2) - 4p^4 = 1,$$

ou

$$q^4 - 8p^2q^2 + 8p^4 = 1; \quad q^2 = 4p^2 \pm \sqrt{8p^4 + 1}.$$

Pour que q^2 soit rationnel, il faut que $8p^4 + 1$ soit le carré d'un nombre impair $2r + 1$, c'est-à-dire qu'on ait

$$8p^4 + 1 = 4r^2 + 4r + 1; \quad 8p^4 = 4r^2 + 4r; \quad p^4 = \frac{r(r+1)}{2}.$$

Or, aucun nombre triangulaire, excepté l'unité, n'est égal à un bicarré (*): donc $r = 1$, $p^2 = 1$; il s'ensuit

$$q^2 = 1, \quad \alpha = 2, \quad \beta = 1, \quad z = 3, \quad y = 1, \quad x = 5;$$

d'où

$$2x = 10.$$

3. Si z était pair, on aurait

$$x = \alpha' + \beta^2, \quad z + 1 = \alpha^2 - \beta^2, \quad z = 2\alpha\beta, \quad \alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha\beta = 1,$$

α , β premiers entre eux, β pair et α impair.

Et, à cause de $\alpha^2 + \beta^2 = 4y^2 + 1$,

$$2\beta^2 + 2\alpha\beta = 4y^2, \quad \beta(\beta + \alpha) = 2y^2.$$

Par suite,

$$\beta = 2p^2, \quad \beta + \alpha = q^2, \quad \alpha = q^2 - 2p^2;$$

$$(q^2 - 2p^2)^2 - 4p^4 - 4p^2(q^2 - 2p^2) = 1,$$

ou

$$q^4 - 8p^2q^2 + 8p^4 = 1, \quad q^2 = 4p^2 \pm \sqrt{8p^4 + 1},$$

et, comme précédemment,

$$p^2 = 1, \quad q^2 = 1.$$

De là,

$$\alpha = -1, \quad \beta = 2, \quad z = -4, \quad y^2 = 1, \quad x = 5.$$

(*) LEGENDRE, *Théorie des nombres*, éd. de 1830, t. II, p. 7.

(523)

Ainsi, on a encore $2x = 10$; il en faut conclure que 10 est le seul nombre qui jouisse de la double propriété d'être la somme des carrés de deux nombres impairs consécutifs, et d'avoir pour carré la somme des carrés de deux nombres pairs consécutifs. G.