S. RÉALIS

Note sur quelques équations indéterminées du troisième degré

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 454-457

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__454_0>

NOTE SUR QUELQUES ÉQUATIONS INDÉTERMINÉES DU TROISIÈME DEGRÉ;

PAR M. S. REALIS.

1. On sait que, si une solution de l'équation

$$x^3 + y^3 = 9z^3$$

est donnée par les valeurs $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$, on aura de nouvelles valeurs de x, y, z au moyen des formules

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= \alpha(\alpha^3 + 2\beta^3), \\ y &= -\beta(\beta^3 + 2\alpha^3), \\ z &= \gamma(\alpha^3 - \beta^3). \end{aligned} \right.$$

Cette seconde solution en donnera une troisième; de celle-ci en résultera une quatrième, et ainsi de suite, à l'infini.

En partant de la solution évidente $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$, on peut donc assigner une suite indéfinie de systèmes de valeurs entières de x, y, z vérifiant l'équation proposée. Cependant rien n'indique que l'équation soit complétement résolue de la sorte, et notamment, comme le remarque M. E. Lucas, il ne résulte de là aucun système comportant une valeur paire de z. De telles solutions existent pourtant, puisqu'on peut faire, par exemple, $x = 919$, $y = -271$, $z = 438$ (*voir* les *Nouvelles Annales*, année 1876, p. 83).

Or, la remarque que nous voulons placer ici, c'est que, dès que l'on a $\alpha^3 + \beta^3 = 9\gamma^3$, on satisfera également à l'équation considérée, en posant

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= 2\alpha^2 - 4\alpha\beta + 9\beta\gamma - 9\gamma^2, \\ y &= 2\beta^2 - \beta\alpha + 9\alpha\gamma - 18\gamma^2, \\ z &= 2\alpha^2 - 4\alpha\gamma - \gamma\beta + \beta^2. \end{aligned} \right.$$

Nous ne donnons pas ici la déduction de ces formules, dont l'exactitude peut être facilement vérifiée *à posteriori*.

D'après cela, ayant obtenu, au moyen de la solution initiale et des formules (1), les valeurs

$$\alpha = 17, \quad \beta = -20, \quad \gamma = -7,$$

nous obtiendrons de suite, par les expressions (2), les nouvelles valeurs

$$x = 2757, \quad y = -813, \quad z = 1314,$$

ou plutôt, en ôtant le facteur commun 3,

$$x = 919, \quad y = -271, \quad z = 438.$$

C'est la solution mentionnée ci-dessus.

En général, on n'aura qu'à s'appuyer sur un cas particulier, où β soit un nombre pair et γ un nombre impair, pour être assuré que les formules (2) fourniront des valeurs impaires pour x et y, et une valeur paire pour z. Ces valeurs, il est superflu de le dire, devront être débarrassées des facteurs impairs qui pourraient leur être communs.

2. Considérons maintenant l'équation

$$x^3 + y^3 = 7z^3.$$

Une solution connue $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$ en amène une autre à l'aide des mêmes formules (1) qui servent pour l'équation considérée précédemment. Il arrive ici de même, comme le remarque encore M. Lucas, que la résolution n'est pas complète; en effet, en partant des valeurs initiales $\alpha = 2$, $\beta = -1$, $\gamma = 1$, l'application des formules (1) ne conduit à aucun système de valeurs où z soit un nombre pair.

Cela nous fournit l'occasion de proposer les nouvelles formules

$$(3)\quad \begin{cases} x = 2\alpha^2 + 4\,\alpha\beta - 7\,\beta\gamma - 7\gamma^2, \\ y = 2\beta^2 + \beta\alpha - 7\,\alpha\gamma + 14\gamma^2, \\ z = -2\alpha^2 + 4\,\alpha\gamma + \gamma\beta + \beta^2, \end{cases}$$

par lesquelles on résout également l'équation donnée, α, β, γ constituant la solution $\alpha^3 + \beta^3 = 7\gamma^3$. Ces relations, faciles à vérifier, remplissent manifestement le but de conduire à une valeur paire de z, et à des valeurs impaires de x et y, lorsqu'on prend α et γ impairs, et β pair.

Exemple. — Au moyen de la solution initiale, les formules (1) donnent $\alpha = 15$, $\beta = 12$, $\gamma = 9$: avec ces valeurs, les formules (3) donnent à leur tour

$$x = -153, \quad y = 657, \quad z = 342,$$

c'est-à-dire, en supprimant le facteur commun 9,

$$x = -17, \quad y = 73, \quad z = 38;$$

solution citée par M. Lucas.

3. Maintenant, a-t-on, dans ce qui précède, la solution complète des équations considérées? Il se peut qu'il en soit ainsi, mais nous n'avons pas de preuve à en donner; il convient d'ajouter, d'ailleurs, qu'il existe d'autres formules de solution pour ces équations, en outre des systèmes (1), (2), (3). A la rigueur, on n'a pas même le droit d'affirmer d'avance que les procédés indiqués fournissent un nombre indéfini de solutions distinctes. Il pourrait être objecté, en effet, que, une fois arrivés à certaines valeurs de x, y, z, la suppression des facteurs communs à ces valeurs ramènera les solutions précédentes, sans qu'il soit possible d'aller plus loin. Mais il

nous suffira d'avoir mentionné ces questions, auxquelles il est peut-être assez difficile de répondre.

Ajoutons, en terminant, que tout ce qui précède peut être généralisé, en l'appliquant aux équations de la forme

$$ax^3 + by^3 = cz^3,$$

et à d'autres équations indéterminées du troisième degré, toutes les fois qu'elles admettent des solutions entières. Nous pourrons revenir sur ce sujet.