

ÉDOUARD LUCAS

Sur l'équation indéterminée $X^3 + Y^3 = AZ^3$

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 17
(1878), p. 425-426

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__425_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1878, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR L'ÉQUATION INDETERMINÉE $X^3 + Y^3 = AZ^3$;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

On a le théorème suivant :

Pour que l'équation proposée soit vérifiée par des valeurs entières de X, Y, Z, A, il faut et il suffit que A appartienne à la forme $xy(x+y)$ préalablement débarrassée de ses facteurs cubiques.

En effet, on a l'identité

$$[x^3 - y^3 + 6x^2y + 3xy^2]^3 + [y^3 - x^3 + 6y^2x + 3yx^2]^3 \\ = xy(x+y) \cdot 3^3 [x^2 + xy + y^2]^3,$$

et l'on résout l'équation proposée, par les valeurs

$$X = x^3 - y^3 + 6x^2y + 3xy^2,$$

$$Y = y^3 - x^3 + 6y^2x + 3yx^2,$$

$$Z = 3(x^2 + xy + y^2),$$

$$A = xy(x+y).$$

Réciproquement, si l'équation est vérifiée pour les valeurs x_0, y_0, z_0 des variables, et si l'on pose

$$x = x_0^3, \quad y = y_0^3,$$

on a

$$xy(x+y) = A(x_0y_0z_0)^3.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer. Il résulte encore de l'identité précédente que toute solution de l'équation proposée conduit à une série indéfinie de solutions nouvelles, en supposant A constant. Il faut excepter le cas de $x = \pm y$.

Exemple. — Pour $x = 1, y = 2$, on a la solution

$$17^3 + 37^3 = 6 \cdot 21^3;$$

de laquelle on déduit une série indéfinie d'autres solutions. On observera ainsi que l'équation

$$x^3 + y^3 = 6z^3$$

a une infinité de solutions, bien que Legendre ait affirmé le contraire. On peut aussi trouver d'autres identités, en nombre illimité, et ainsi la suivante :

$$\begin{aligned} & [x^3 + 3x^2y - y^3]^3 + [3xy(x + y)]^3 \\ & = [x^3 + 6x^2y + 3xy^2 - y^3][x^3 + 3xy^2 + y^3]^3, \end{aligned}$$

de laquelle il résulte que le polynôme

$$x^3 + 6x^2y + 3xy^2 - y^3$$

n'est jamais égal au cube d'un nombre entier, ni à son double, à son triple, à son quadruple ou à son quintuple.