

GAMBEY

**Solution de la question de mathématiques
spéciales proposée au concours
d'agrégation en 1876**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 17
(1878), p. 414-418

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__414_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1878, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION EN 1876;

PAR M. GAMBÉY.

On donne une parabole P et un point H dont la projection orthogonale sur le plan de la courbe se fait au sommet de cette parabole :

1° *Trouver l'équation générale des surfaces de révolution du second ordre qui passent par la parabole P et par le point H;*

2° *Déterminer le nombre de celles de ces surfaces dont l'axe passe par un point A donné dans le plan Q, qui contient le point H et l'axe de la parabole P.*

Classer les mêmes surfaces quand le point A se meut dans le plan Q.

Prenons pour origine des coordonnées le sommet de la parabole, pour axe des z la projetante du point H, et pour plan des xy le plan de la parabole, dans lequel elle sera rapportée à son axe et à la tangente au sommet; de sorte que ses équations seront

$$z = 0, \quad y^2 - 2px = 0.$$

Soit $2h$ la distance du point H au sommet de la parabole.

L'équation générale des surfaces de révolution

$$(1) \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - r^2 \\ - (\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta)^2 = 0$$

devra satisfaire aux conditions suivantes :

$$\alpha^2 = 1, \quad \beta = 0, \quad a + \alpha\delta = p, \quad b = 0, \\ a^2 + b^2 + c^2 - r^2 - \delta^2 = 0, \quad h(1 - \gamma^2) = c + \gamma\delta.$$

L'équation (1) devient alors, en prenant $\alpha = +1$,

$$(2) \quad y^2 + (1 - \gamma^2)z^2 - 2\gamma xz - 2px - 2h(1 - \gamma^2)z = 0.$$

Les coordonnées du centre de la sphère

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - r^2 = 0$$

devant satisfaire constamment aux équations

$$b = 0, \quad c - \gamma(a - p) - h(1 - \gamma^2) = 0,$$

quel que soit γ , il s'ensuit que les équations de l'axe de révolution des surfaces (2) sont

$$(3) \quad y = 0, \quad z - \gamma(x - p) - h(1 - \gamma^2) = 0.$$

Remarquons tout de suite que la valeur $\alpha = -1$ n'a d'autre effet que de faire changer le signe de γ dans les équations (2) et (3). Il est donc inutile de la considérer.

Soient x_0, o, z_0 les coordonnées du point A. L'axe de révolution des surfaces (2) devant passer en A, on aura

$$z_0 - \gamma(x_0 - p) - h(1 - \gamma^2) = 0,$$

ou, en ordonnant par rapport à γ ,

$$h\gamma^2 - (x_0 - p)\gamma + z_0 - h = 0.$$

Cette équation détermine deux valeurs de γ en fonction des coordonnées du point A. Ces valeurs seront réelles si l'on a

$$(x_0 - p)^2 - 4h(z_0 - h) \geq 0;$$

donc, si le point A est extérieur à la parabole

$$(x - p)^2 - 4h(z - h) = 0,$$

il y a deux surfaces de révolution dont l'axe passe en A ;
il n'y en a plus qu'une si ce point est sur la parabole.

Enfin, pour tout point intérieur à cette même parabole, les surfaces de révolution sont imaginaires.

La parabole qui limite ainsi les régions où les surfaces sont réelles est l'*enveloppe* des axes de révolution de ces surfaces. Elle a son axe parallèle à l'axe des z , et elle est tangente en son sommet à la droite $z - h = 0$.

Si l'on écrit ainsi son équation dans le plan des xz ,

$$(z - 2h)^2 + (x + z - p)(x - z - p) = 0,$$

on voit encore qu'elle est tangente aux deux droites

$$x + z - p = 0, \quad x - z - p = 0,$$

les points de contact étant sur la droite

$$z - 2h = 0,$$

et ayant pour abscisses $p - 2h$ et $p + 2h$.

En faisant $y = 0$ dans l'équation (2), on obtient la section méridienne des surfaces qu'elle représente. Son équation dans le plan des xz est donc

$$(4) \quad (1 - \gamma^2)z^2 - 2\gamma xz - 2px - 2h(1 - \gamma^2)z = 0.$$

Elle est toujours du genre hyperbole, tant que l'on a $\gamma \geq 0$; par suite les surfaces (2) ne peuvent être que des *hyperboloïdes* ou des *cônes*, tant que γ est différent de zéro.

Le z du centre de la méridienne étant égal à $-\frac{p}{\gamma}$, on voit que ce centre s'éloigne à l'infini, si γ tend vers zéro. Pour $\gamma = 0$, la section méridienne est la parabole

$$z^2 - 2px - 2hz = 0,$$

et la surface de révolution est un *paraboloïde*.

Il faut maintenant distinguer les cas où les surfaces (2) sont des hyperboloïdes à une nappe de ceux où elles

sont des hyperboloïdes à deux nappes, ou des cônes. Il suffit pour cela de déterminer les points d'intersection de leur axe avec la section méridienne (4).

L'équation qui donne le z de ces points est

$$\gamma(1 + \gamma^2)z + 2p(1 + \gamma^2)z - 2ph(1 - \gamma^2) + 2p^2\gamma = 0.$$

Cette coordonnée sera réelle si l'on a

$$(p + 2h\gamma)(1 - \gamma^2) \geq 0;$$

donc, si l'on a

$$(p + 2h\gamma)(1 - \gamma^2) > 0,$$

il y a deux points d'intersection réels et distincts; et par suite l'équation (2) représente un *hyperboloïde à deux nappes*.

Si l'on a

$$(p + 2h\gamma)(1 - \gamma^2) = 0,$$

les deux points d'intersection sont confondus en un seul, et l'équation (2) représente un *cône*.

Enfin, si l'on a

$$(p + 2h\gamma)(1 - \gamma^2) < 0,$$

les points d'intersection sont imaginaires, et l'on a un *hyperboloïde à une nappe*.

Or, il est facile de voir que le produit ci-dessus est positif si γ varie de $-\infty$ à $-\frac{p}{2h}$, et de -1 à $+1$; qu'il est au contraire négatif si γ varie de $-\frac{p}{2h}$ à -1 , et de $+1$ à $+\infty$; et qu'enfin il est nul si γ prend les valeurs $-\frac{p}{2h}$, -1 et $+1$. On suppose $p > 2h$.

Donc, si γ varie de $-\infty$ à $-\frac{p}{2h}$, ou de -1 à $+1$, on a des *hyperboloïdes à deux nappes*.

Si γ varie de $-\frac{p}{2h}$ à -1 ou de $+1$ à $+\infty$, on a des *hyperboloïdes à une nappe*.

Et pour les valeurs de γ égales à $-\frac{p}{2h}$, -1 , $+1$, on a des *cônes*.

Il faut encore remarquer que, si γ varie de -1 à $+1$, on obtient, pour $\gamma = 0$, un *paraboloïde*. C'est la limite commune des deux séries d'hyperboloïdes à deux nappes, obtenus en faisant croître γ de -1 à zéro, ou en le faisant décroître de $+1$ à zéro.

Les axes des trois cônes ont pour équations dans le plan des xz

$$2px + 4hz - p^2 - 4h^2 = 0,$$

$$x + z - p = 0,$$

$$x - z - p = 0,$$

et l'axe du paraboloïde

$$z - h = 0.$$

Le premier de ces axes touche la parabole limite sur l'axe des z . Quant aux autres, nous connaissons déjà leur position.

La discussion a été faite en supposant $p > 2h$; elle serait aussi facile, et presque semblable, en supposant $p < 2h$.

Mais, si $p = 2h$, le premier cône se confond avec le second. Toute valeur de γ moindre que $+1$ donne un hyperboloïde à deux nappes, tandis que toute valeur supérieure à $+1$ donne un hyperboloïde à une nappe.

Note. — La même question a été résolue par MM. Escary, Tourrettes et Moret-Blanc.