GEORGES DOSTOR

Inscription dans le cercle des quatre polygones réguliers de trente côtés

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 370-374

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__370_1>

INSCRIPTION DANS LE CERCLE DES QUATRE POLYGONES RÉGULIERS DE TRENTE COTÉS;

PAR M. GEORGES DOSTOR.

1. On sait qu'il existe quatre polygones réguliers de 15 côtés. Si le rayon du cercle circonscrit à ces polygones est égal à l'unité, les côtés des polygones, pris dans un ordre inverse, seront

$$2\sin\frac{7\pi}{15},\quad 2\sin\frac{4\pi}{15},\quad 2\sin\frac{2\pi}{15}\quad \text{et}\quad 2\sin\frac{\pi}{15}.$$

Les trois premiers polygones sont étoilés, le dernier est convexe.

Puisque 15 est un nombre impair, il existera aussi quatre polygones réguliers de 30 côtés; ces côtés sont, dans l'ordre croissant,

$$2\sin\frac{\pi}{30},\quad 2\sin\frac{7\pi}{30},\quad 2\sin\frac{11\pi}{30}\quad \text{et}\quad 2\sin\frac{13\pi}{30}.$$

Le premier polygone est convexe, et les trois autres sont étoilés.

Si nous comparons les sinus, qui, dans ces deux lignes, se correspondent verticalement, nous verrons que leurs arcs sont complémentaires.

Nous avons par suite les égalités

$$\sin^2\frac{\pi}{30} = 1 - \sin^2\frac{7\pi}{15},\quad \sin^2\frac{7\pi}{30} = 1 - \sin^2\frac{4\pi}{15},$$

$$\sin^2\frac{11\pi}{30} = 1 - \sin^2\frac{2\pi}{15},\quad \sin^2\frac{13\pi}{30} = 1 - \sin^2\frac{\pi}{15}.$$

Les côtés des quatre pentédécagones réguliers étoilés étant (*)

$$2\sin\frac{7\pi}{15} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} + \sqrt{15} - \sqrt{3}\right),$$

$$2\sin\frac{4\pi}{15} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{15} - \sqrt{3}\right).$$

$$2\sin\frac{2\pi}{15} = \frac{1}{4}\left(-\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} + \sqrt{15} + \sqrt{3}\right),$$

$$2\sin\frac{\pi}{15} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{15} + \sqrt{3}\right),$$

(*) Voir le *Traité de Géométrie élémentaire* de MM. Rouché et de Comberousse, 3e édition, 1874, Ire Partie, page 171. Les côtés des quatre pentédecagones réguliers y sont calculés géométriquement par une methode aussi simple qu'élégante, et d'une facilité bien remarquable.

on obtient immédiatement pour les carrés des côtés des quatre polygones réguliers de 30 côtés

$$4\sin^2\frac{\pi}{30}=4-\frac{1}{16}\left(\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{15}-\sqrt{3}\right)^2,$$

$$4\sin^2\frac{7\pi}{30}=4-\frac{1}{16}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{15}-\sqrt{3}\right)^2,$$

$$4\sin^2\frac{11\pi}{30}=4-\frac{1}{16}\left(-\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{15}+\sqrt{3}\right)^2,$$

$$4\sin^2\frac{13\pi}{30}=4-\frac{1}{16}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{15}+\sqrt{3}\right)^2.$$

Si nous effectuons, que nous réduisions, nous obtiendrons, en extrayant la racine carrée,

$$2\sin\frac{\pi}{30}=\frac{1}{4}\sqrt{36-4\sqrt{5}-4\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}},$$

$$2\sin\frac{7\pi}{30}=\frac{1}{4}\sqrt{36+4\sqrt{5}+4\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}},$$

$$2\sin\frac{11\pi}{30}=\frac{1}{4}\sqrt{36-4\sqrt{5}+4\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}},$$

$$2\sin\frac{13\pi}{30}=\frac{1}{4}\sqrt{36+4\sqrt{5}+4\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}.$$

Les expressions sous les radicaux sont des carrés. On a, en effet, dans $2\sin\frac{\pi}{10}$,

$$\begin{aligned}
&36-4\sqrt{5}-4\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\\
&=30-6\sqrt{5}-4\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}+6+2\sqrt{5}\\
&=\left(\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)^2-2\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)\sqrt{10-2\sqrt{5}}+(\sqrt{5}+1)^2\\
&=\left[\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}-(\sqrt{5}+1)\right]^2;
\end{aligned}$$

et ainsi des trois autres quantités analogues.

Il s'ensuit que les côtés des quatre polygones réguliers de 30 côtés sont

$$2\sin\frac{30}{\pi} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}} - \sqrt{5} \quad 1\right),$$

$$2\sin\frac{7\pi}{30} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{5} + 1\right),$$

$$2\sin\frac{11\pi}{30} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}} + \sqrt{5} + 1\right),$$

$$2\sin\frac{13\pi}{30} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \sqrt{5} - 1\right).$$

2. L'inspection de ces formules fait voir que :

1° *La différence* $2\sin\frac{11\pi}{30} - 2\sin\frac{\pi}{30}$ *entre les côtés du second polygone étoilé et du polygone convexe est égale au côté* $\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+1\right)$ *du décagone régulier étoilé ;*

2° *La différence* $2\sin\frac{13\pi}{30} - 2\sin\frac{7\pi}{30}$ *entre les côtés des deux autres polygones étoilés est égale au côté* $\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$ *du décagone régulier convexe.*

3. Cette méthode peut être appliquée avec avantage au calcul des côtés des deux pentagones réguliers.

En effet, les côtés des deux décagones réguliers, l'un *étoilé* et l'autre *convexe,* sont

$$2\sin\frac{3\pi}{10} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+1\right), \quad 2\sin\frac{\pi}{10} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right);$$

et, comme les côtés des deux pentagones réguliers, l'un *convexe* et l'autre *étoilé,* sont

$$2\sin\frac{\pi}{5} = 2\cos\frac{3\pi}{10}, \quad 2\sin\frac{2\pi}{5} = 2\cos\frac{\pi}{10},$$

ou trouve tout de suite, pour ces côtés, les valeurs

$$2\sin\frac{\pi}{5} = \sqrt{4 - \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)^2} = \sqrt{4 - \frac{1}{4}(6+2\sqrt{5})}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}},$$

$$2\sin\frac{2\pi}{5} = \sqrt{4 - \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)^2} = \sqrt{4 - \frac{1}{4}(6-2\sqrt{5})}$$
$$= \frac{1}{2}\,2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

Dans cette méthode, on peut se dispenser d'avoir recours à la Trigonométrie. Il suffit de considérer des triangles rectangles qui ont pour hypoténuse le diamètre du cercle.