

A. TOURRETES

**Question de mécanique élémentaire donnée
au concours d'agrégation de 1872**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 17
(1878), p. 319-320

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__319_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1878, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUESTION DE MÉCANIQUE ÉLÉMENTAIRE

DONNÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1872;

SOLUTION DE M. A. TOURRETTES.

On donne une série de circonférences situées dans un même plan, ayant leurs centres en ligne droite, se touchant extérieurement, de manière que chacune soit tangente à celle qui la précède et à celle qui la suit, et dont les rayons forment une progression géométrique décroissante. On demande le centre de gravité du système prolongé à l'infini.

Soient a le rayon du premier cercle dont le centre est pris pour origine; q la raison de la progression; x la distance du centre de gravité du système à l'origine.

Les rayons seront

$$a, aq, aq^2, aq^3, \dots, aq^n;$$

les circonférences

$$2\pi a, 2\pi aq, 2\pi aq^2, \dots, 2\pi aq^n,$$

et les distances de leurs centres à l'origine

$$0, a + aq, a + 2aq + aq^2, \dots, a + 2aq + 2aq^2 + \dots + aq^n.$$

En appliquant le théorème des moments, on aura une égalité dont le premier membre sera

$$x (2\pi a + 2\pi a q + 2\pi a q^2 + \dots) \text{ ou } \frac{2\pi a r}{1-q}.$$

Le deuxième membre aura pour expression

$$2\pi a^2 [(q + q^2) + (q^2 + 2q^3 + q^4) \\ + (q^3 + 2q^4 + 2q^5 + q^6 + \dots)]$$

ou bien

$$2\pi a^2 [q + 2q^2 + 3q^3 + \dots + nq^n \\ + nq^{n+1} + (n-1)q^{n+2} + \dots + q^n].$$

Or, la première partie de la parenthèse

$$q + 2q^2 + \dots + nq^n$$

a pour valeur

$$\frac{q}{1-q^2} - \frac{q^{n+1}}{1-q^2} - \frac{nq^{n+1}}{1-q},$$

et la deuxième est plus petite que

$$n(q^{n+1} + q^{n+2} + \dots + q^{2n}),$$

ou bien

$$\frac{nq^{n+1}(1-q^n)}{1-q}.$$

La parenthèse est donc plus petite que la somme suivante :

$$\frac{q}{1-q^2} - \frac{q^{n+1}}{1-q^2} - \frac{nq^{n+1}}{1-q} + \frac{nq^{n+1}(1-q^n)}{1-q},$$

qui se réduit à $\frac{q}{1-q^2}$ pour $n = \infty$ (voir DESBOVES, *Questions d'Algèbre*, p. 229).

Par conséquent,

$$x < \frac{aq}{1-q}.$$