

A. TOURRETES

**Problème de mathématiques élémentaires
donné au concours d'agrégation en 1871**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 17
(1878), p. 316-319

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__316_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1878, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROBLÈME DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

DONNÉ AU CONCOURS D'AGRÉGATION EN 1871;

SOLUTION DE M. A. TOURRETTES.

On donne la longueur de la bissectrice de l'angle A d'un triangle ABC, et la somme des deux côtés AB, AC qui comprennent cet angle : on demande d'étudier la variation de la surface du triangle, ainsi que les variations de l'angle A et des côtés AB, AC.

Soient x, y, z les côtés du triangle, α la longueur de la bissectrice de l'angle A, D le point de rencontre avec CB, s la somme $y + z$ des deux côtés de l'angle A.

D'après deux théorèmes connus, j'ai

$$yz = a^2 + CD \cdot DB \quad \text{et} \quad \frac{CD}{y} = \frac{DB}{z} = \frac{x}{s};$$

d'où

$$CD = \frac{xy}{s}, \quad DB = \frac{xz}{s},$$

et par suite

$$yz = \frac{x^2 s^2}{s^2 - x^2};$$

d'ailleurs

$$y + z = s.$$

Les valeurs de y et z sont les racines d'une équation du second degré, qui donne

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \frac{s \sqrt{s^2 - x^2} \pm s \sqrt{s^2 - x^2 - 4z^2}}{2 \sqrt{s^2 - x^2}}.$$

Pour la réalité des racines, il faut que

$$x^2 \leq s^2 - 4a^2,$$

et cette condition entraîne $s^2 - x^2 > 0$.

Je cherche maintenant la valeur de $\cos A$. On a immédiatement

$$\cos A = \frac{y^2 + z^2 - x^2}{2yz},$$

et comme

$$y^2 + z^2 = s^2 - 2yz = \frac{s^2(s^2 - x^2) - 2x^2 s^2}{s^2 - x^2},$$

il vient

$$\cos A = \frac{(s^2 - x^2)^2 - 2x^2 s^2}{2x^2 s^2}.$$

Il faut donc que

$$(s^2 - x^2)^2 - 2x^2 s^2 \leq 2x^2 s^2 \quad \text{ou} \quad x^2 \leq s^2 - 2xs.$$

On voit que x doit satisfaire aux deux inégalités

$$s^2 - 4\alpha^2 \geq x^2 \geq s^2 - 2\alpha s.$$

Pour trouver, en fonction de x , l'expression de la surface, je forme $\sin A$

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{s^2 - x^2}{2\alpha^2 s^2} \sqrt{4\alpha^2 s^2 - (s^2 - x^2)^2},$$

et comme

$$s = \frac{1}{2} \gamma z \sin A,$$

il vient

$$s = \frac{1}{4} \sqrt{4\alpha^2 s^2 - (s^2 - x^2)^2}.$$

Ayant trouvé les limites de x^2 , il est facile maintenant d'étudier les variations des côtés, de l'angle A et de la surface.

On peut mettre les valeurs de γ et z sous la forme

$$\left. \begin{matrix} \gamma \\ z \end{matrix} \right\} = \frac{s}{2} \pm \frac{s}{2} \sqrt{1 - \frac{4\alpha^2}{s^2 - x^2}}.$$

Si $x^2 = s^2 - 2\alpha s$, ou sa valeur minima, le radical est maximum, par suite γ est maximum, z minimum. On remarque que leur différence est maxima et qu'elle est égale à $\sqrt{s^2 - 2\alpha s}$. Les deux côtés sont l'un sur l'autre.

A mesure que x augmente, γ diminue, z croît, et, pour $x^2 = s^2 - 4\alpha^2$, les deux côtés deviennent égaux à $\frac{s}{2}$.

Pour l'angle A , on trouve $\cos A = 1$ quand

$$x^2 = s^2 - 2\alpha s;$$

alors $A = 0$, ainsi que je l'ai remarqué ci-dessus. A mesure que x croît, la valeur de $\cos A$ diminue et par

suite l'angle augmente. Pour $x^2 = s^2 - 4\alpha^2$,

$$\cos A = \frac{8\alpha^2 - s^2}{s^2}.$$

Enfin la surface, nulle pour $x^2 = s^2 - 2\alpha s$, va en augmentant avec x , puisque le carré $(s^2 - x^2)^2$ diminue. Elle est maxima pour $x^2 = s^2 - 4\alpha^2$.