NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GENTY

Concours d'admission à l'École normale en 1872

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 310-316

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__310_1>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE EN 1872;

PAR M. GENTY.

Par un point fixe A *pris sur une surface du second degré donnée, on mène tous les plans qui coupent la surface suivant des courbes dont l'un des sommets est en* A :

1° *Trouver le lieu de celui des axes de la section qui passe au point* A ;

2° *Trouver le lieu du point où le diamètre conjugué du plan sécant, relativement à la surface donnée, rencontre le plan tangent à cette surface au point* A ;

3° *Construire ce dernier lieu dans le cas où le plan tangent en* A *coupe la surface donnée suivant deux droites rectangulaires.*

Soit At une droite située dans le plan tangent à la surface au point A; un plan quelconque mené par cette droite coupe la surface suivant une conique qui lui est tangente au point A, et, si C′ est le centre de cette conique, C le centre de la surface, la droite CC′ est le diamètre conjugué du plan sécant. La droite AC′ sera une droite du lieu, si elle est perpendiculaire à At.

Or, si le plan sécant tourne autour de At, le diamètre conjugué CC′ décrit un plan (P) qui coupe le plan tangent en A suivant une droite At', et l'on sait que les droites At et At' sont parallèles à deux diamètres conjugués de la conique (C), intersection de la surface par le plan diamétral parallèle au plan tangent au point A.

Donc on aura une droite du lieu en prenant l'intersection du plan (P) avec le plan mené par le point A perpendiculairement à la droite At. Mais ce dernier plan contient la normale à la surface au point A; le plan P contient la droite fixe AC.

Si donc N est le pied de la normale à la surface au point A, sur le plan de la conique C, le lieu du point d'intersection d'un diamètre de cette conique avec la perpendiculaire abaissée du point N sur le diamètre conjugué est la base du cône cherché sur ce plan.

Cette courbe est une hyperbole équilatère (H), qui passe au point N, au point C, et dont les asymptotes sont parallèles aux axes de la conique (C) (*). La tangente au point N est la perpendiculaire abaissée sur le diamètre conjugué de CN; la tangente au point C est le diamètre conjugué de la perpendiculaire à CN.

L'équation de (H) est très-facile à trouver. Soient

$$ax^2 + by^2 = 1$$

(*) Les points d'intersection de cette courbe avec la conique C sont les pieds des normales abaissées du point N sur cette courbe.

l'équation de la conique (C) dans son plan, et x_1, y_1 les coordonnées du point N ; l'équation de (H) sera

$$ax(y - y_1) = by(x - x_1).$$

Le cône qui a cette hyperbole pour base a deux de ses arêtes situées dans le plan tangent au point A ; ce sont les droites menées par ce point parallèlement aux axes de la conique (C).

La conique (H) se décompose en un système de deux droites pour $y_1 = 0$; la signification géométrique de cette condition est très-simple. En effet, dans ce cas, la normale à la surface donnée au point A rencontre le plan de la conique (C) en un point N d'un des axes Cx de cette conique ; donc le diamètre $C'y$ est perpendiculaire au plan de ses deux diamètres conjugués AC et Cx; donc ce diamètre est un axe de la surface, et par suite le point A est situé sur une des sections principales de la surface.

Le cône se réduit alors à deux plans, l'un qui est le plan CAN, et l'autre qui est déterminé par le point A, et une parallèle QR à Cy, dont l'équation est

$$ax = b(x - x_1).$$

On obtient un résultat analogue pour $x_1 = 0$.

Si l'on a en même temps $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, le point A est un des sommets de la surface ; le point N se confond avec le point C, centre de la section principale (C). Le cône se compose alors des deux plans principaux qui passent au point A.

Si le point A est un ombilic, la conique C est un cercle, l'hyperbole (H) se compose du diamètre NC et de la ligne située tout entière à l'infini dans le plan du cercle (C) : donc le cône se compose de l'ensemble de deux plans : le plan ANC, et le plan tangent en A à la surface donnée.

Considérons maintenant la conique Γ, intersection de la surface donnée par le plan $\mathrm{CA}t'$; soient $\mathrm{A}d$ la droite du lieu située dans ce plan, et C' le milieu de la corde $\mathrm{A}d$; la droite $\mathrm{C}c'$ coupe $\mathrm{A}t'$ en un point m' ; il s'agit de trouver le lieu décrit par ce point dans le plan tangent en A, ou, ce qui revient au même, le lieu décrit dans le plan de la conique C par le point m, situé sur le diamètre ee' parallèle à $\mathrm{A}t'$ et tel que $\mathrm{C}m = \mathrm{A}m'$. Soit μ le point d'intersection de ce diamètre avec $\mathrm{A}d$. On voit très-simplement que le point m est le conjugué harmonique du point μ par rapport aux points e et e'. Or le point μ décrit l'hyperbole (H), et les points e et e' la conique (C) ; donc, si par le centre C de cette dernière conique on mène un rayon vecteur qui la coupe aux points e et e', et qui coupe (H) au point μ, le lieu du point m, conjugué harmonique de μ, par rapport aux points e et e', est la courbe cherchée (Σ).

Cette définition géométrique permet d'obtenir avec la plus grande facilité l'équation et la forme de la courbe. Pour obtenir l'équation, il est commode de recourir aux coordonnées polaires.

Soient R, r et ρ les rayons vecteurs respectifs des courbes C, H et Σ, pour un même angle ω; on aura

$$\mathrm{R}^2 = \frac{1}{a\cos^2\omega + b\sin^2\omega}, \quad r = \frac{ay_1\cos\omega - bx_1\sin\omega}{(a-b)\sin\omega\cos\omega}$$

et

$$\rho = \frac{\mathrm{R}^2}{r} = \frac{(a-b)\sin\omega\cos\omega}{(a\cos^2\omega + b\sin^2\omega)(ay_1\cos\omega - bx_1\sin\omega)},$$

ou, en revenant aux coordonnées rectilignes,

$$(ax^2 + by^2)(axy_1 - byx_1) = (a-b)xy.$$

Cette équation représente une courbe du troisième ordre qui a un point double à l'origine; les tangentes en ce point sont les axes de la conique (C).

Deux des asymptotes de la courbe (Σ) sont parallèles à celles de la courbe (C); donc elles sont réelles si cette courbe est une hyperbole, et imaginaires si (C) est une ellipse.

La troisième asymptote est parallèle à la tangente de l'hyperbole (H) à l'origine C.

Cherchons les équations des asymptotes elles-mêmes, dans le cas où la conique (C) est une hyperbole.

Pour éviter les radicaux nous remplacerons, dans les équations des courbes, a et b respectivement par $\frac{1}{a^2}$ et $-\frac{1}{b^2}$.

L'équation de (Σ) est alors

$$(b^2x^2 - a^2y^2)(b^2xy_1 + a^2yx_1) - a^2b^2c^2xy = 0,$$

en posant, comme d'habitude,

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Les équations des asymptotes seront respectivement de la forme

$$bx - ay + \lambda = 0,$$
$$bx + ay + \mu = 0,$$
$$b^2xy_1 + a^2yx_1 + \nu = 0,$$

et nous obtiendrons les valeurs des indéterminées λ, μ et ν, en identifiant les termes du second ordre du produit

$$(bx - ay + \lambda)(bx + ay + \mu)(b^2xy_1 + a^2yx_1 + \nu)$$

avec les termes du second ordre de l'équation de la courbe; on obtient ainsi très-simplement pour les équations des asymptotes

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{c^2}{2(ax_1+by_1)},$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{c^2}{2(ax_1-by_1)},$$

$$\frac{xy_1}{a^2}+\frac{yx_1}{b^2}=-\frac{c^2x_1y_1}{a^2x_1^2-b^2y_1^2}.$$

La construction géométrique des asymptotes est extrêmement simple. Soient l et l' les points de rencontre des asymptotes de (C) avec l'hyperbole (H). Menons par le point l une parallèle à C l', et soit f le point de rencontre de cette droite avec la conique (C). La parallèle à Cl menée par le point f est l'une des asymptotes de la courbe.

Menons de même par le point l' une parallèle à Cl jusqu'à sa rencontre f' avec la courbe (C) ; la parallèle à C l' menée par le point f' est une seconde asymptote de la courbe.

Les droites lf et $l'f'$ se coupent en un point G de la courbe H (*).

De même les deux asymptotes de la courbe (Σ) que nous venons de construire se coupent en un même point B de la droite CG; c'est le conjugué harmonique du point G, par rapport aux deux points d'intersection de cette droite avec la conique (C) ; donc le point B est un point de la courbe (Σ).

Si la conique (C) est une hyperbole équilatère (c'est-à-dire si le plan tangent en A à la surface donnée la coupe suivant deux droites rectangulaires) le point G se confond avec le point N.

(*) Cela resulte de ce que les droites Cl et Cl', faisant le même angle avec chacune des asymptotes de l'hyperbole (H), sont parallèles à deux diametres conjugués de cette courbe.

Si (C) est une ellipse, les asymptotes Cl et Cl' sont imaginaires, il en est de même des asymptotes de la courbe (Σ) qui leur sont respectivement parallèles ; mais le point G ; et par suite aussi le point B, où ces deux asymptotes coupent la courbe, sont réels.

La troisième asymptote de la courbe (Σ) est toujours réelle ; elle est parallèle à la tangente en C à l'hyperbole (H) ; elle fait donc avec Cx le même angle que CG.

De plus, la distance du point B à cette asymptote est double de la distance du point A à cette même droite, ce qui suffit pour la déterminer.

Si par le point A nous menons une parallèle à ll', le point d'intersection de cette droite avec l'asymptote que nous venons de construire est un point de la courbe.

Il est maintenant facile de trouver les deux formes que présente la courbe, selon que la conique (C) est une ellipse ou une hyperbole.