

MORET-BLANC

Théorème proposé par M. Desboves

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 17
(1878), p. 263-264

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__263_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1878, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

THÉORÈME PROPOSÉ PAR M. DESBOVES

(voir 2^e série, t. XVI, p. 279),

DÉMONSTRATION DE M. MORET-BLANC.

Si dans un quadrilatère ABCD, dont on désigne les côtés AB, BC, CD, DA et les diagonales AC, BD par a, b, c, d, e, f , on a

$$(1) \quad \frac{e}{f} = \frac{ad + bc}{ab + cd},$$

on a aussi nécessairement l'une des deux relations suivantes :

$$(2) \quad ef = ac + bd,$$

$$(3) \quad \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2 & ef + ac + bd \\ & - 2 \sqrt{ab + cd} \sqrt{ad + bc} = 0, \end{cases}$$

et réciproquement l'une ou l'autre des équations (2) et (3) entraîne nécessairement l'équation (1).

Cherchons la relation qui doit exister entre les côtés et les diagonales d'un quadrilatère : il y en a nécessairement une, car le nombre des conditions nécessaires pour déterminer un polygone de n côtés étant $2n - 3$, c'est cinq pour le quadrilatère.

J'appelle α et β les angles BAC et CAD. Les triangles BAC, CAD et BAD donnent

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + e^2 - 2ae \cos \alpha, \\ c^2 &= d^2 + e^2 - 2de \cos \beta, \\ f^2 &= a^2 + d^2 - 2ad \cos A; \end{aligned}$$

(264)

d'où

$$\cos \alpha = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2ae},$$

$$\cos \beta = \frac{d^2 - c^2 + e^2}{2de},$$

$$\cos A = \frac{a^2 + d^2 - f^2}{2ad}.$$

On a d'ailleurs

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \\ \sin^2(\alpha + \beta) &= \sin^2 \alpha \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha \sin^2 \beta \\ &\quad + 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \alpha \cos \beta \\ &= \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos A = 1 - \cos^2 A, \end{aligned}$$

d'où

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 A - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos A = 1,$$

et, en remplaçant $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos A$ par leurs valeurs et chassant les dénominateurs,

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} &e^4 f^2 + e^2 f^4 + e^2 f^2 (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \\ &+ e^2 (a^2 b^2 + c^2 d^2 - a^2 c^2 - b^2 d^2) \\ &+ f^2 (b^2 c^2 + a^2 d^2 - a^2 c^2 - b^2 d^2) \\ &+ (a^4 c^2 + a^2 c^4 + b^4 d^2 + b^2 d^4) \\ &- (a^2 b^2 c^2 + a^2 b^2 d^2 + a^2 c^2 d^2 + b^2 c^2 d^2) = 0, \end{aligned} \right.$$

relation qui peut s'écrire

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} &(ac + bd - ef) \\ &[(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2)(ac + bd + ef) \\ &\quad - 2(ab + cd)(ad + bc)] \\ &+ [c(ab + cd) - f(ad + bc)]^2 = 0, \end{aligned} \right.$$

ce qui démontre le théorème et sa réciproque.

Note du rédacteur. — Quand le quadrilatère ABCD est *convexe*, l'égalité (1) entraîne l'égalité (2), et inversement. (G.)