

KOEHLER

**Solution d'une question proposée
par M. Realis**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 17
(1878), p. 261-262

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__261_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1878, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION D'UNE QUESTION PROPOSÉE PAR M. REALIS

(voir 2^e série, t. XIV, p. 298);

PAR M. KOEHLER.

Dans toute équation du troisième degré dont les racines sont a, b, c , les différences $a - b, b - c, c - a$ s'expriment toujours en fonction rationnelle de l'une d'elles et des coefficients.

Voici un calcul très-simple et très-élémentaire qui conduit à la proposition ci-dessus, pour l'équation complète au moyen d'une division algébrique. Soit

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

l'équation complète; soient $\delta, \delta', \delta''$ les trois différences $a - b, b - c, c - a$; on a d'abord

$$\begin{aligned}\delta' + \delta'' &= -\delta, \\ \delta'\delta'' &= bc - c^2 - ab + ac \\ &= (bc + ca + ab) - (a^2 + b^2 + c^2) + (a - b)^2 \\ &= 3q - p^2 + \delta^2,\end{aligned}$$

de sorte que δ' et δ'' sont données par la formule

$$\Delta = -\frac{\delta}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{4p^2 - 12q - 3\delta^2}.$$

L'équation au carré des différences est, comme on sait,

$$\Delta^6 - 2\Delta^4(p^2 - 3q) + \Delta^2(p^2 - 3q)^2 + 4p^3r - p^2q^2 - 18pqr + 4q^3 + 27r^2 = 0,$$

ou abrégativement

$$\Delta^6 - 2M\Delta^4 + M^2\Delta^2 + N = 0.$$

En divisant le triple du premier membre de cette équation par la quantité soumise au radical dans l'expression ci-dessus de Δ , c'est-à-dire par $-3\Delta^2 + 4M$, on trouve pour quotient $-\left(\Delta^2 - \frac{M}{3}\right)^2$ et pour reste $\frac{4M^3}{9} + 3N$. On a donc la relation

$$-(4M - 3\Delta^2) \left(\Delta^2 - \frac{M}{3}\right)^2 + \frac{4M^3}{9} + 3N = 0,$$

et, comme

$$\begin{aligned} \frac{4M^3}{9} + 4N &= \frac{4}{9}p^6 + 9p^2q^2 + 81r^2 - 4p^4q + 12p^3r - 54pqr \\ &= \left(\frac{2}{3}p^3 - 3pq + 9r\right)^2, \end{aligned}$$

il vient, en définitive,

$$\Delta = -\frac{\delta}{2} \pm \frac{\frac{2}{3}p^3 - 3pq + 9r}{2\left(\delta^2 + q - \frac{p^2}{3}\right)}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

En faisant $p = 0$, on retrouve l'expression donnée par M. Réalis pour l'équation du troisième degré sans second terme.