Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 227-237

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__227_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1239

(voir 2e série, t. XVI, p. 288);

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

L'équation $x^3 - 6\alpha\beta x - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 0$, *dans laquelle* α *et* β *sont des entiers quelconques qui n'annulent pas le dernier terme, n'a pas de racines entières.*

(S. REALIS.)

15.

En effet, l'équation peut être écrite ainsi :

$$(x+\alpha)^3+(x+6)^3=(x+\alpha+6)^3,$$

et l'on sait qu'Euler a démontré que jamais un cube entier ou fractionnaire n'est égal à la somme de deux cubes rationnels (*).

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

Question 1240

(voir 2e série, t. XVI, p. 288);

Par M. MORET-BLANC.

L'équation

$$x^3-(\beta-\gamma)x+\alpha\gamma=0,$$

dans laquelle α et γ sont des entiers plus grands que zéro, et β est un entier satisfaisant à la condition

$$\alpha^2>\beta\geqq(\alpha-1)^2,$$

ou bien à la condition

$$\alpha^2<\beta\leqq(\alpha+1)^2,$$

a au moins une racine réelle incommensurable.

(S. Realis.)

Le coefficient du premier terme étant 1, l'équation n'admet pour racines commensurables que des racines entières; de plus, elle a une racine réelle de signe contraire à $\alpha\gamma$, c'est-à-dire négative.

Substituant à x dans le premier membre successivement $-(\alpha-1)$, $-\alpha$ et $-(\alpha+1)$, on a les trois ré-

(*) Voir l'*Algèbre* d'Euler, ou la *Théorie des nombres* de Legendre.

sultats

$$-(\alpha-1)[(\alpha-1)^2-\beta]+\gamma,$$
$$-\alpha(\alpha^2-\beta),$$
$$-(\alpha-1)[(\alpha+1)^2-\beta]-\gamma.$$

Si l'on a $\alpha^2>\beta\geqq(\alpha-1)^2$, les deux premiers résultats sont de signes contraires, et l'équation a une racine incommensurable comprise entre $-(\alpha-1)$ et $-\alpha$.

Si l'on a $\alpha^2<\beta\leqq(\alpha+1)^2$, les deux derniers résultats sont de signes contraires, et l'équation a une racine incommensurable comprise entre $-\alpha$ et $-(\alpha+1)$.

Le théorème est donc démontré.

Le même théorème s'applique évidemment à l'équation

$$x^3-(\beta-\gamma)x-\alpha\gamma=0,$$

qui a une racine incommensurable comprise entre $\alpha-1$ et α, ou entre α et $\alpha+1$.

Question 1243

(voir 2ᵉ série, t. XVI, p. 335)

PAR M. FERDINANDO PISANI.

« *Dans tous les triangles circonscrits à une conique donnée, et tels que les hauteurs passent par les points de contact des côtés opposés, le rapport d'une hauteur au diamètre conjugué de celui qui passe par son pied est constant.* » (POUJADE.)

Soient ABC le triangle circonscrit; a, b, c les pieds des hauteurs Aa, Bb, Cc; O le centre de la conique tangente aux côtés du triangle aux points a, b, c; Oa', Ob', Oc' les rayons conjugués des rayons Oa, Ob, Oc, qui passent par les pieds des hauteurs (*).

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

On sait que les droites Oa', Ob', Oc' sont respectivement parallèles aux côtés BC, AC, AB du triangle circonscrit. En outre on a, d'après le théorème de Newton,

$$\frac{Oa'}{Ob'} = \frac{Ca}{Cb}.$$

D'autre part, la similitude des triangles AaC, BbC donne

$$\frac{Ca}{Cb} = \frac{Aa}{Bb};$$

donc

$$\frac{Aa}{Bb} = \frac{Oa}{Ob'} \quad \text{ou} \quad \frac{Aa}{Oa'} = \frac{Bb}{Ob'}.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Note. — La même question a été résolue par M. Lez.

Question 1247

(voir 2e série, t. XVI, p. 336);

PAR M. E. DUNOYER,

Élève en Mathématiques spéciales au lycée de Marseille.

Dans les surfaces du second ordre à centre unique, ce centre pouvant d'ailleurs être situé à distance finie, ou infinie, le lieu des points tels que les génératrices rectilignes réelles ou imaginaires soient orthogonales est donné par l'intersection réelle ou imaginaire de la surface considérée avec la sphère de Monge, relative à cette surface. (ESCARY.)

On peut donner plusieurs démonstrations de ce théorème ; voici, je crois, la plus simple.

Soient AB et AC deux génératrices orthogonales, réelles ou imaginaires ; le plan BAC est tangent à la surface. Le plan mené par AB et perpendiculaire à BAC est tangent à la surface, puisqu'il la coupe déjà suivant une génératrice rectiligne. De même, le plan mené par AC perpendiculaire à BAC est tangent. On a ainsi trois plans tangents rectangulaires passant par le point A : donc ce point se trouve sur la sphère de Monge ; par conséquent, le lieu du point A est donné par l'intersection de la surface considérée avec la sphère de Monge, relative à cette même surface.

Note. — Solutions analogues de MM. Barbarin et Couette.

Question 1252

(voir 2e série, t. XVI, p. 432);

PAR M. BEAUGEY,

Élève en Mathématiques spéciales au lycée de Grenoble.

Soient O *et* XY *un point et une droite fixes. Du point* O *on mène jusqu'à la droite :*

OA *quelconque ;*

OB *perpendiculaire à* OA ;

OC *bissectrice de l'angle droit* AOB ;

OD *perpendiculaire à* OC.

Déterminer le minimum de la somme AB + CD *des deux hypoténuses.*

Du point O j'abaisse la perpendiculaire OP sur la droite XY. Soit OP $= a$; soient aussi α et β les angles BOP et COP.

J'ai

$$AB = BP + PA = a(\tang\alpha + \cot\alpha),$$

$$CD = CP + PD = a(\tang\beta + \cot\beta);$$

d'où

$$AB + CD = a\,(\operatorname{tang}\alpha + \cot\alpha + \operatorname{tang}\beta + \cot\beta).$$

Mais

$$\operatorname{tang}\alpha + \cot\alpha = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

et

$$\operatorname{tang}\beta + \cot\beta = \frac{1}{\sin\beta\cos\beta};$$

donc

$$\begin{aligned} AB + CD &= a\left(\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} + \frac{1}{\sin\beta\cos\beta}\right) \\ &= 2a\left(\frac{\sin 2\alpha + \sin 2\beta}{\sin 2\alpha \sin 2\beta}\right) \\ &= 4a\left[\frac{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}{\sin 2\alpha\sin 2\beta}\right]. \end{aligned}$$

Or

$$\alpha + \beta = 45^\circ, \quad \sin(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}\sqrt{2};$$

donc

$$\begin{aligned} AB + CD &= 2a\sqrt{2}\,\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin 2\alpha\sin 2\beta} \\ &= 2a\sqrt{2}\,\frac{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}{4\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta} \\ &= \frac{1}{2}a\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sin\alpha\sin\beta} + \frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}\right), \end{aligned}$$

$\alpha + \beta$ ayant une valeur constante de 45 degrés, le produit $\sin\alpha\sin\beta$ est maximum pour $\alpha = \beta$; il en est de même de $\cos\alpha\cos\beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$; donc le minimum de $AB + CD$ aura lieu pour $\alpha = \beta$, c'est-à-dire lorsque les deux triangles seront symétriques par rapport à la perpendiculaire OP, abaissée du point O sur la droite XY (*).

Note. — La même question a été résolue par MM. Armand Bertrand, propriétaire à Azillanet (Hérault); F. Loppé, caporal au 119e de ligne; Louis Rajola Pescarini, à Naples; Ferdinando Pisani, professeur à l'Institut technique de Girgenti; Thornton, à la Virginie; Jamet, Morel-Blanc; Droz, ingénieur à Zürich; P. Sondat; Lez; Morel; Lacombe; Th. Franchy, maître répétiteur au lycée de Moulins; Robaglia; Cottereau, élève en Mathématiques élémentaires au lycée de Châteauroux (classe de M. Escary); Eugène Delmas, élève du lycée de Lyon.

M. Bertrand en a donné deux solutions; la première, entièrement

---

(*) Lorsque $\alpha = 6$, l'égalité $AB + CD = 4a \frac{\sin(\alpha + 6)\cos(\alpha - 6)}{\sin 2\alpha \cdot \sin 26}$ devient $AB + CD = 4a\frac{1}{\sin 2\alpha} = 4a\sqrt{2}$. Donc le minimum de $AB + CD$ est $4a\sqrt{2}$.

Les plus petites valeurs de la somme et du produit des deux hypoténuses AB, CD peuvent être déterminées, sans calculs, au moyen des considérations suivantes :

Remarquons d'abord qu'en menant d'un point donné O des droites aux milieux M, M′ des hypoténuses AB, CD, on forme un triangle OMM′ qui est rectangle au point O; car les angles OMM′, OM′M, extérieurs aux triangles isoscèles OAM, ODM′, sont respectivement doubles des angles A et D, dont la somme est égale à la moitié d'un angle droit. Et, comme $OM = \frac{1}{2}AB$, et $OM' = \frac{1}{2}CD$, on voit que la question proposée se ramène à trouver le minimum de la somme $OM + OM'$ des deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle MOM′, dont la hauteur OP est invariable et donnée.

Il est évident que l'hypoténuse MM′ de ce triangle ne peut être moindre que le double de la hauteur OP et qu'elle est égale à 2OP, quand le triangle est isoscèle; à partir de cette valeur 2OP, l'hypoténuse peut croître indéfiniment. Or, lorsque l'hypoténuse augmente, il en est de même de la somme des carrés et du produit des deux côtés OM, OM′ de l'angle droit, et, par suite, la somme $OM + OM'$ de ces deux côtés est croissante. Donc les plus petites valeurs de $OM + OM'$ et de $OM \times OM'$ sont celles que ces deux quantités prennent quand le triangle OMM′ est isoscèle. Dans ce cas on a

$$OM + OM' = 2OP\sqrt{2} \quad \text{et} \quad OM \times OM' = OP \times MM' = 2\overline{OP}^2.$$

De là résulte que les minima de la somme et du produit des deux hypoténuses AB, CD ont pour valeurs $4OP\sqrt{2}$, et $8\overline{OP}^2$. (G.)

analytique, consiste en des calculs de Trigonométrie et de dérivées; voici la seconde ; nous conservons la rédaction de l'auteur :

« La solution de cette question se déduit comme corollaire de la proposition suivante, que nous allons démontrer :

» *Si l'on considère un angle constant* AOB, *tournant autour du sommet* O, *et une droite indéfinie* XY ; *le segment* AB *déterminé par les côtés de l'angle* AOB *sur la droite* XY, *sera minimum quand le triangle* AOB *sera isoscèle.*

» Abaissons OP perpendiculaire sur XY et posons

$$\mathrm{OP} = h, \quad \mathrm{AOP} = \varphi, \quad \mathrm{BOP} = \varphi', \quad \varphi + \varphi' = \alpha.$$

» Les triangles rectangles AOP, BOP donnent

$$\mathrm{AP} = h \operatorname{tang}\varphi, \quad \mathrm{BP} = h \operatorname{tang}\varphi' ;$$

ajoutons membre à membre, il vient

$$\mathrm{AB} = h(\operatorname{tang}\varphi + \operatorname{tang}\varphi').$$

Or nous avons

$$\operatorname{tang}\varphi + \operatorname{tang}\varphi' = \frac{\sin\alpha}{\cos\varphi \cos\varphi'} = \frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha + \cos(\varphi - \varphi')}.$$

Sous cette forme, on voit facilement que l'expression est minimum quand $\varphi' = \varphi$.

» Remarquons maintenant que, dans la question proposée, on a

$$\mathrm{AB} + \mathrm{CD} = \mathrm{AD} + \mathrm{CB}.$$

» Or, d'après ce qui précède, les segments AD, CB seront minima quand les triangles AOD, COB seront isoscèles ; d'ailleurs, les angles AOC, BOD étant égaux, ces minima auront lieu simultanément. Donc, puisque les deux parties AD, CB de la somme AB + CD sont simultanément minima quand AOD est isoscèle, la somme AB + CD sera elle-même minimum dans les mêmes circonstances. »

Question 1253

(voir 2e série, t. XVI, p. 432);

PAR M. GAMBEY,

Professeur au lycée de Saint-Étienne.

On propose de résoudre les équations

$$zy - r^2 = \mathrm{A}, \quad xz - s^2 = \mathrm{B}, \quad xy - t^2 = \mathrm{C},$$
$$st - rx = \mathrm{D}, \quad tr - sy = \mathrm{E}, \quad rs - zt = \mathrm{F}.$$

(J. CH. DUPAIN.)

Je pose d'abord

$$BC - D^2 = a,\quad AC - E^2 = b,\quad AB - F^2 = c,$$
$$EF - AD = d,\quad DF - BE = e,\quad DE - CF = f,$$

$$\begin{vmatrix} x & t & s \\ t & y & r \\ s & r & z \end{vmatrix} = \delta,\quad \begin{vmatrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{vmatrix} = \Delta.$$

Des équations proposées je tire ensuite

$$\delta x = a,\quad \delta y = b,\quad \delta z = c,\quad \delta r = d,\quad \delta s = e,\quad \delta t = f;$$

d'où, en substituant dans l'une des proposées, la première par exemple, les valeurs de z, y et r, et remarquant que l'on a

$$\frac{bc - d^2}{A} = \frac{ac - e^2}{B} = \frac{ab - d^2}{C} = \Delta,$$

on obtient

$$\delta^2 = \Delta;$$

par suite, il vient

$$\Delta x^2 = a^2,\quad \Delta y^2 = b^2,\quad \Delta z^2 = c^2,$$
$$\Delta r^2 = d^2,\quad \Delta s^2 = e^2,\quad \Delta t^2 = f^2,$$

d'où x, y, z, r, s, t.

Il n'y a que deux systèmes de solutions; la condition de réalité est $\Delta > 0$.

Note. — La même question a été résolue par MM. Sondat; Jamet Thornton; Th. Franchy, maître répétiteur au lycée de Moulins; Louis Rajola Pescarini; Moret-Blanc; Ferdinando Pisani; Bussy, élève en Mathématiques élémentaires au lycée de Châteauroux.

Question 1254

(voir 2^e^ série, t. XVI, p. 432),

PAR M. MORET-BLANC.

Démontrer la formule suivante, où C_m^n *est le nombre des combinaisons de m objets n à n :*

$$k\,C_a^k + (k-1)\,C_a^{k-1}\,C_b^1 + (k-2)\,C_a^{k-2}\,C_b^2 + \ldots = \frac{a}{a+b}\,C_{a+b}^k . k .$$

(H. LAURENT.)

Soient a objets d'une première espèce et b objets d'une seconde espèce. Si l'on forme toutes les combinaisons de ces $(a+b)$ objets pris k à k, et que dans chacune on mette successivement à la première place chacun des objets qui y rentrent sans s'occuper de l'ordre des autres, le nombre des groupes ainsi obtenus sera

$$k\,C_{a+b}^k .$$

Ces groupes peuvent se partager en deux classes : ceux qui commencent par un des a objets de la première espèce et ceux qui commencent par un des b objets de la seconde. Le nombre des groupes compris dans la première classe est précisément le premier membre de la formule à démontrer, et, comme chacun des objets se trouve évidemment en tête le même nombre de fois, le rapport du nombre des groupes de la première classe au nombre total des groupes est $\frac{a}{a+b}$. On a donc

$$\frac{k\,C_a^k + (k-1)\,C_a^{k-1}\,C_b^1 + (k-2)\,C_a^{k-2}\,C_b^2 + \ldots}{k\,C_{a+b}^k} = \frac{a}{a+b},$$

ou

$$k\,C_a + (k - 1)\,C_a^{k-1}\,C_b^1$$
$$+ (k - 2)\,C_a^{k-2}\,C^b + \ldots = \frac{a}{a+b}\,C_{a+b}^k \cdot k.$$

C. Q. F. D.

Note. — La formule a ete demontree par MM. L. Troupenet, elève en Mathematiques speciales au lycee de Bordeaux; Ch. Doyère, du lycee de Caen; J. Mouchel; Pescarini; J. de Virieu, professeur a Lyon; F. Romero, a Saint-Jean-de-Luz; Ferdinando Pisani.