

GENTY

Exercices sur le tétraèdre

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 17
(1878), p. 223-225

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__223_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1878, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

EXERCICES SUR LE TÉTRAÈDRE;

PROPOSÉS PAR M. GENTY.

1. Si, dans un tétraèdre, les arêtes opposées sont égales deux à deux, on peut dire que ce tétraèdre est *isosèle*. Les quatre faces d'un tétraèdre isosèle sont évidemment des triangles égaux.

Soient a , b , c les côtés de l'un de ces triangles, A, B et C les angles. Soient de plus α , β , γ les médianes qui joignent les milieux des côtés a , b et c respectivement, aux milieux des côtés opposés du tétraèdre.

2. On a

$$\alpha^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2},$$

$$\beta^2 = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2},$$

$$\gamma^2 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2};$$

$$a^2 = \beta^2 + \gamma^2,$$

$$b^2 = \gamma^2 + \alpha^2,$$

$$c^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

3. Les médianes sont en même temps les plus courtes distances des arêtes opposées du tétraèdre, et elles forment un trièdre trirectangle.

4. Les angles dièdres opposés du tétraèdre sont égaux deux à deux; et, si φ, ψ, θ sont les angles dièdres qui ont pour arêtes les côtés a, b et c de la face ABC, on a

$$\frac{\sin \varphi}{a} = \frac{\sin \psi}{b} = \frac{\sin \theta}{c},$$

et par suite

$$\frac{\sin \varphi}{\sin A} = \frac{\sin \psi}{\sin B} = \frac{\sin \theta}{\sin C}.$$

5. Si V est le volume du tétraèdre, on a

$$V = \frac{\alpha\beta\gamma}{3}.$$

On a aussi

$$V = \frac{abc}{3} \sqrt{\cos A \cos B \cos C}.$$

6. Si S est l'aire de l'une des faces du tétraèdre, on a

$$S = \frac{\sqrt{\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2}}{2}.$$

On a donc aussi

$$\begin{aligned} & \beta^2 \gamma^2 + \gamma^2 \alpha^2 + \alpha^2 \beta^2 \\ &= \frac{(a + b + c)(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c)}{4}. \end{aligned}$$

7. Le point d'intersection des médianes, qui est le centre de gravité du tétraèdre, est en même temps le centre des sphères inscrite et circonscrite.

Si R et r sont les rayons de ces deux sphères, on a

$$\begin{aligned} R^2 &= \frac{\alpha^2 \beta^2 \gamma^2}{4(\beta^2 \gamma^2 + \gamma^2 \alpha^2 + \alpha^2 \beta^2)} \\ &= \frac{a^2 b^2 c^2 \cos A \cos B \cos C}{(a + b + c)(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c)}, \\ r^2 &= \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{4} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}. \end{aligned}$$

8. Tous les angles plans d'un tétraèdre isocèle sont nécessairement des angles aigus.

9. Si l'on désigne par P la puissance de l'un des sommets du tétraèdre par rapport à la sphère inscrite, on a

$$\begin{aligned} P &= \frac{a^2 b^2 c^2}{(a + b + c)(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c)} \\ &= \frac{(\beta^2 + \gamma^2)(\gamma^2 + \alpha^2)(\alpha^2 + \beta^2)}{4(\beta^2 \gamma^2 + \gamma^2 \alpha^2 + \alpha^2 \beta^2)}. \end{aligned}$$