

Concours général de 1877

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 17
(1878), p. 213-218

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__213_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1878, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1877

(voir 2^e série, t. XVII, p. 106);

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES. PHILOSOPHIE.

RHÉTORIQUE. SECONDE. TROISIÈME.

PAR UN ABONNÉ.

I. — *Mathématiques élémentaires.*

Étant donnés deux plans P et P' et un point A hors de ces plans, on considère toutes les sphères qui passent par le point A , et qui sont tangentes aux deux plans donnés :

1^o Trouver le lieu de la droite qui joint le point A au centre de la sphère variable ;

2^o Trouver le lieu du point où cette sphère touche l'un des plans.

Dans le cas le plus général, les plans P , P' se coupent, et le point A est situé dans l'intérieur de l'un des angles dièdres formés par P et P' . Le centre C de la sphère

variable appartient au plan bissecteur de cet angle dièdre. Les projections c, c' de C sur les plans P, P' sont les points de contact de la sphère et de ces plans.

Soient Aa la perpendiculaire menée du point A sur le plan bissecteur ; A' le symétrique de A , par rapport à ce plan ; p, p' les points où la perpendiculaire Aa prolongée coupe les plans P, P' . Il est clair que A' est un point de la sphère dont C est le centre, et qui passe en A , et que la droite pc est tangente à la sphère en c . On a donc $pc = \sqrt{pA' \times p'A}$; il s'ensuit que le lieu du point c où la sphère variable touche le plan P est une circonférence qui a pour centre le point p , et pour rayon la moyenne géométrique entre pA' et pA . De même, le lieu du point c' est une circonférence dont p' est le centre et qui a pour rayon $\sqrt{p'A' \times p'A}$. Ces deux circonférences sont égales et symétriques par rapport au plan bissecteur.

La ligne plane décrite par le centre C de la sphère variable, se projetant suivant une circonférence sur le plan P , est, comme on sait, une ellipse. Le point a est le centre de cette ellipse ; ses axes se déterminent au moyen d'une construction bien connue.

Par conséquent, le lieu de la droite qui joint le point A au centre de la sphère variable est un cône dont la trace sur le plan bissecteur est une ellipse déterminée, et qui a pour sommet le point donné A .

Lorsque les plans P, P' sont parallèles, le centre C de la sphère appartient à un plan parallèle à P et P' et équidistant de P et P' . La ligne décrite par C se projetant en vraie grandeur sur le plan P est une circonférence, et le lieu de la droite AC est un cône de révolution.

Note. — Même solution de MM. Moret-Blanc et Gambey.

II. — Philosophie.

Étant donnée une sphère de rayon R , trouver :

1° Le lieu du sommet d'un trièdre dont les trois arêtes sont tangentes à cette sphère, et dont les trois faces sont égales chacune à 60 degrés ;

2° Le lieu du sommet d'un angle trièdre dont les plans des trois faces sont tangentes à la même sphère, et dont les trois angles dièdres sont égaux chacun à 120 degrés.

1° Soient SA, SB, SC les trois arêtes tangentes aux points A, B, C à la sphère dont le centre est O , et le rayon R . Il résulte des données de la question que les six arêtes du tétraèdre $SABC$ sont égales entre elles. La droite OS est perpendiculaire au plan ABC , en un point M , centre du cercle circonscrit au triangle équilatéral ABC . On a

$$CM = \frac{CB}{\sqrt{3}} = \frac{SC}{\sqrt{3}}$$

et

$$OC \times SC = OS \times CM$$

ou

$$R \cdot SC = OS \frac{SC}{\sqrt{3}};$$

donc

$$OS = R \sqrt{3}.$$

Le lieu du sommet S est donc une sphère concentrique à la sphère donnée, et dont le rayon est $R\sqrt{3}$.

2° A, B, C désignant les points de contact, les trois faces du trièdre $OABC$ sont égales chacune à 60 degrés.

Les six arêtes du tétraèdre $OABC$ sont égales à R .

On a

$$CM = \frac{R}{\sqrt{3}}$$

et

$$OM^2 = R^2 - \frac{R^2}{3} = \frac{2R^2}{3}; \quad OM = R\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

D'autre part, le triangle rectangle OCS donne

$$OC^2 = OM \times OS, \quad \text{ou} \quad R^2 = R\sqrt{\frac{2}{3}} \times OS,$$

d'où

$$OS = R\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Le lieu du sommet S est une sphère concentrique à la sphère donnée, et dont le rayon

$$OS = R\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Note. — Même solution de M. Moret-Blanc.

III. — Rhétorique.

Par un point A, pris en dehors d'une circonférence donnée O, on mène à cette circonférence une tangente AB, terminée au point de contact B, et l'on demande quelle doit être la distance AO pour que, en faisant tourner la figure autour de cette droite, l'aire de la surface engendrée par AB soit la moitié de la surface engendrée par la circonférence O.

Menons BH perpendiculaire sur AO, et posons $BH = h$, $OB = r$, $OA = x$. Les aires engendrées par AB et par la circonférence ont respectivement pour valeurs $\pi \cdot OB \cdot AH$, et $4\pi \cdot OB^2$; d'où

$$\pi \cdot OB \cdot AH = 2\pi \cdot OB^2, \quad AH = 2 \cdot OB = 2r.$$

Le triangle rectangle ABO donne $AB^2 = AO \times AH$,
ou

$$x^2 - r^2 = x \times 2r, \quad x^2 - 2rx - r^2 = 0;$$

$$x = r + r\sqrt{2} = r(1 + \sqrt{2}).$$

IV. — Seconde.

La perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle sur l'hypoténuse partage ce triangle en deux triangles partiels : démontrer que le carré du rayon du cercle inscrit dans le triangle total est égal à la somme des carrés des rayons des cercles inscrits dans les triangles partiels.

Cette proposition résulte immédiatement de ce que les rayons des cercles inscrits dans des triangles semblables sont proportionnels aux côtés homologues de ces triangles.

V. — Troisième.

Soit ABC un triangle dans lequel l'angle A est droit, et l'angle B double de l'angle C. On construit en dehors du triangle ABC : 1° sur l'hypoténuse BC le carré BCDE; 2° sur le côté AB, le triangle équilatéral ABF; 3° sur le côté AC, le triangle équilatéral ACG. On joint le point F au point G, et au point E, extrémité du côté BE du carré BCDE.

On suppose l'hypoténuse BC égale à a , et l'on demande de calculer : 1° les côtés AB, AC du triangle ABC; 2° la distance du point F à la droite BE, et la distance du point G à la droite AF; 3° la surface du quadrilatère EFGD.

1° Dans le triangle rectangle ABC, l'angle C = 30 degrés, donc :

$$1^{\circ} \text{ AB} = \frac{1}{2} \text{ BC} = \frac{1}{2} a, \quad \text{et} \quad \text{AC} = \frac{1}{2} a \sqrt{3}.$$

2° Si l'on prolonge la droite EB jusqu'à sa rencontre avec FA en un point H, l'angle ABH supplément de ABE sera de 30 degrés. Par suite, l'angle BHF est droit : donc la

distance FH du point F à la droite BE est égale à $\frac{a}{4}$. De même le prolongement AM de FA forme avec AC un angle de 30 degrés; la droite FM est, par conséquent, perpendiculaire à GC, au point M, milieu de GC; elle est parallèle à BC et à DE. Ainsi la distance GM du point G à la droite AF est égale à $\frac{1}{4} a \sqrt{3}$.

3° Le quadrilatère EFGD étant la somme des triangles FDG, FDE, on a

$$\text{EFGD} = \frac{1}{2} \text{DG} \times \text{FM} + \frac{1}{2} \text{DE} \times \text{DM},$$

puisque FM est parallèle à DE.

Or,

$$\text{DG} = \text{DC} + \text{CG} = a + \frac{1}{2} a \sqrt{3} = \frac{1}{2} a (2 + \sqrt{3}),$$

$$\text{FM} = \text{MH} + \text{HF} = a + \frac{1}{4} a = \frac{5a}{4},$$

$$\text{DE} = \text{BC} = a,$$

$$\text{DM} = \text{DC} + \text{CM} = a + \frac{1}{4} a \sqrt{3} = \frac{1}{4} a (4 + \sqrt{3}).$$

Il en résulte

$$\text{EFGD} = \frac{5}{16} a^2 (2 + \sqrt{3}) + \frac{1}{8} a^2 (4 + \sqrt{3});$$

d'où

$$\text{EFGD} = \frac{1}{16} a^2 (18 + 7 \sqrt{3}).$$

On peut aussi exprimer la surface EFGD en fonction de l'hypoténuse a , en remarquant que EFGD est la somme du trapèze EFMD et du triangle rectangle FMG, dont il est facile d'évaluer les surfaces.
