

LEZ

Concours d'admission à l'École polytechnique (année 1877)

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 17
(1878), p. 193-195

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__193_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1878, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
(ANNÉE 1877)

(voir 2^e série, t. XVI, p. 379);

PAR M. LEZ.

Composition de Mathématiques.

On donne l'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ d'une hyperbole rapportée à ses axes et les coordonnées (μ, ν) d'un point M de son plan.

Par le point M on mène deux tangentes à l'hyperbole la touchant aux points A et B : trouver l'équation du cercle passant par les points A, B et le centre O de l'hyperbole.

Ce cercle rencontre l'hyperbole en deux points C et D, distincts de A et de B : trouver l'équation de la droite CD.

Si le point M décrit une droite du plan, aux diverses positions du point M correspondront diverses positions de la droite CD : quel est le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du centre de l'hyperbole sur ces droites ?

On sait que, par rapport à l'hyperbole, dont l'équation est

$$(1) \quad b^2 x^2 - a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0$$

la polaire AB d'un point M (μ, ν) a pour équation

$$b^2 \mu x - a^2 \nu y - a^2 b^2 = 0.$$

Or, une conique passant par les quatre points où cette droite et une autre $Bx + Ay - AB = 0$ rencon-

trait la courbe (1) sera représentée par

$$b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 \\ - K(b^2\mu x - a^2\nu y - a^2b^2) \times (Bx + Ay - AB) = 0, \\ \text{soit}$$

$$(b^2 - KBb^2\mu)x^2 + (KAa^2\nu - a^2)y^2 \\ + K(Ba^2\nu - Ab^2\mu)xy + K(Ba^2b^2 + ABb^2\mu)x \\ + K(Aa^2b^2 - ABa^2\nu)y - a^2b^2(1 + KAB) = 0.$$

Pour que la conique passe par l'origine O des coordonnées, il faut que $K = -\frac{1}{AB}$, et, pour qu'elle devienne un cercle, on doit avoir

$$Ba^2\nu = Ab^2\mu \quad \text{et} \quad b^2 + a^2 = KBb^2\mu + KAa^2\nu.$$

De ces trois relations on tire

$$A = -\frac{b^4\mu^2 + a^4\nu^2}{b^2\mu(a^2 + b^2)}, \\ B = -\frac{b^4\mu^2 + a^4\nu^2}{a^2\nu(a^2 + b^2)}, \\ K = -\frac{a^2b^2\mu\nu(a^2 + b^2)^2}{(b^4\mu^2 + a^4\nu^2)^2}.$$

Il est maintenant facile de trouver que le cercle passant par le centre de l'hyperbole et par les points A, B, C, D a pour équation

$$x^2 + y^2 + \frac{\mu(a^4b^2 + a^2b^4 - b^4\mu^2 - a^4\nu^2)x}{a^2(a^2\nu^2 - b^2\mu^2)} \\ + \frac{\nu(a^4b^2 + a^2b^4 + b^4\mu^2 + a^4\nu^2)y}{b^2(a^2\nu^2 - b^2\mu^2)} = 0,$$

et que la droite CD est représentée par

$$(2) \quad b^2\mu(a^2 + b^2)x + a^2\nu(a^2 + b^2)y + b^4\mu^2 + a^4\nu^2 = 0.$$

L'équation de la perpendiculaire abaissée du centre O sur CD est

$$y = \frac{a^2\nu}{b^2\mu}x.$$

Cette perpendiculaire rencontre CD en un point ayant pour coordonnées

$$(3) \quad x = -\frac{b^2\mu}{a^2 + b^2}, \quad y = -\frac{a^2\nu}{a^2 + b^2}.$$

Or, le point M décrivant la droite

$$(4) \quad nx + my - mn = 0,$$

les variables μ, ν sont liées par la relation

$$(5) \quad n\mu + m\nu - mn = 0.$$

Pour obtenir le lieu cherché, il suffit d'éliminer μ, ν entre les relations (3) et (4), ce qui donne

$$b^2m^2(a^2 + b^2)y + a^2n(a^2 + b^2)x + a^2b^2mn = 0,$$

équation qui représente une droite.

Note. — Solutions analogues de MM. E. Fauquembergue, maître répétiteur au lycée de Saint-Quentin; Gambey; Moret-Blanc; Thornton.