

GENTY

Question de mathématiques spéciales proposée au concours d'agrégation de 1874

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 17
(1878), p. 186-188

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__186_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1878, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1874;

 PAR M. GENTY.

On donne une ellipse et une hyperbole homofocales ; on imagine une conique quelconque C, doublement tangente à chacune des coniques données. Trouver et discuter le lieu des points de rencontre des tangentes à l'ellipse et à l'hyperbole aux points où ces courbes sont touchées par la conique C.

Nous traiterons le problème dans le cas où les coniques données sont quelconques.

On sait (CHASLES, *Sections coniques*, § 482) qu'il existe en général trois séries de coniques ayant un double contact avec deux coniques données C et C'; les cordes de contact de chaque série de coniques passent par le point de rencontre des axes de symptose L et L' des coniques C et C', et sont conjuguées harmoniques par rapport à ces droites.

Donc le lieu cherché se compose de trois courbes distinctes qu'on obtiendra en considérant successivement chacun des systèmes d'axes de symptose des coniques données.

Soient donc a et a' deux points des coniques C et C' conjugués par rapport aux axes de symptose L et L', le lieu cherché sera le lieu du point d'intersection des tangentes aux points a et a' , c'est-à-dire (CHASLES, § 454) une conique qui passe aux points d'intersection des coniques données C et C'.

D'ailleurs les polaires des ombilics correspondant

au système considéré d'axes de symptose sont conjuguées harmoniques par rapport à ces droites. Donc les deux ombilics font partie du lieu, qui est ainsi complètement déterminé.

Ainsi donc le lieu cherché se compose de trois coniques, dont chacune passe par les quatre points d'intersection de ces deux courbes et par deux ombilics conjugués.

Autrement : Les cordes de contact avec C et C' d'une conique doublement tangente à ces deux coniques sont les polaires de deux points situés sur la droite qui joint les ombilics correspondant au système d'axes de symptose considéré, et ils sont conjugués harmoniques par rapport à ces points.

Donc le lieu cherché est le lieu d'un point tel que deux tangentes A, A', menées de ce point aux deux coniques données, soient conjuguées harmoniques par rapport aux droites menées du même point à deux ombilics conjugués des coniques, c'est-à-dire une conique passant par les points d'intersection des proposées et par les ombilics (CHASLES, § 455, corollaire II).

Dans le cas où les coniques données sont deux coniques homofocales, les ombilics conjugués sont les points imaginaires du cercle à l'infini, les foyers réels et les foyers imaginaires des courbes données. On peut donc écrire immédiatement les équations des courbes dont l'ensemble constitue le lieu demandé.

L'une d'elles est le cercle qui a son centre au centre des courbes, et qui passe par leurs points d'intersection. On aurait pu obtenir directement son équation au moyen des remarques suivantes : cette courbe est le lieu d'un point tel que deux tangentes menées de ce point aux deux courbes données soient conjuguées harmoniques par

rapport aux droites menées de ce point aux points imaginaires du cercle à l'infini, c'est-à-dire le lieu du point de rencontre de deux tangentes aux courbes données qui se coupent à angle droit.

Soient

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda^2} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda^2} = 1$$

les équations des courbes données.

Les équations de deux tangentes se coupant à angle droit seront

$$y - mx = \sqrt{a^2 m^2 + b^2},$$

$$my + x = \sqrt{(a^2 - \lambda^2) + (b^2 - \lambda^2) m^2};$$

en ajoutant ces équations après les avoir élevées au carré, il vient pour l'équation du lieu cherché

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2 - \lambda^2.$$