Nouvelles annales de mathématiques

Laguerre

Sur les systèmes de droites qui sont normales à une même surface

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 181-185

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__181_1>

SUR LES SYSTÈMES DE DROITES QUI SONT NORMALES A UNE MÊME SURFACE;

PAR M. LAGUERRE.

1. Je renverrai, pour toutes les notations dont je me servirai ici, à ma Note *Sur les formules fondamentales de la théorie des surfaces* (¹).

Par chaque point M d'une surface S menons une droite m, dont la position soit définie par l'angle θ qu'elle fait avec la normale MZ à la surface et l'angle φ que fait avec la direction MX sa projection sur le plan tangent.

Les cosinus des angles que font, avec les axes coordonnés, les trois directions MX, MY et MZ, étant respectivement

$$\begin{array}{lll} \cos\alpha, & \cos\beta, & \cos\gamma, \\ \cos\xi, & \cos\eta, & \cos\zeta, \\ \cos\lambda, & \cos\mu, & \cos\nu, \end{array}$$

(¹) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2ᵉ série, t. XI, p. 60.

les cosinus des angles que fera avec les axes la droite m en seront respectivement

$$\cos\alpha \sin\theta \cos\varphi + \cos\xi \sin\theta \sin\varphi + \cos\lambda \cos\theta,$$
$$\cos\beta \sin\theta \cos\varphi + \cos\eta \sin\theta \sin\varphi + \cos\mu \cos\theta,$$
$$\cos\gamma \sin\theta \cos\varphi + \cos\rho \sin\theta \sin\varphi + \cos\nu \cos\theta;$$

et, pour que les diverses droites m soient normales à une même surface, il sera nécessaire et suffisant que l'expression

$$\Sigma dx\,(\cos\alpha \sin\theta \cos\varphi + \cos\xi \sin\theta \sin\varphi + \cos\lambda \cos\theta)$$

soit une différentielle exacte.

On a

$$dx = \mathrm{E}\,du \cos\alpha + \mathrm{G}\,dv \cos\xi,$$
$$dy = \mathrm{E}\,du \cos\beta + \mathrm{G}\,dv \cos\eta,$$
$$dz = \mathrm{E}\,du \cos\gamma + \mathrm{G}\,dv \cos\zeta;$$

substituant ces valeurs dans l'expression précédente, elle donne

$$\mathrm{E} \sin\theta \cos\varphi . du + \mathrm{G} \sin\theta \sin\varphi . dv;$$

et, pour qu'elle soit une différentielle exacte, il est nécessaire et suffisant que l'on ait

$$(1) \qquad \frac{d}{dv}(\mathrm{E} \sin\theta \cos\varphi) = \frac{d}{du}(\mathrm{G} \sin\theta \sin\varphi).$$

2. L'équation précédente ne renferme que les quantités E et G, dont l'expression ne change pas quand on déforme la surface S.

D'où la conséquence suivante :

Concevons que chaque rayon m conserve une position fixe par rapport au plan tangent en M, c'est-à-dire que sa projection sur ce plan tangent et l'angle qu'il fait avec ce plan demeurent invariable; cela posé, *si les rayons* *émanant des divers points de* S *sont normaux à une même surface et si l'on déforme* S *de façon que l'élément d'une courbe quelconque tracée sur cette surface concerne la même valeur, chaque plan tangent à la surface entraînant avec lui le rayon correspondant, les divers rayons dans leur nouvelle position sont encore normaux à une même surface.*

3. L'équation (1) étant satisfaite pour certaines valeurs des fonctions φ et θ, elle est encore évidemment satisfaite quand on y remplace $\sin\theta$ par $k\sin\theta$, k désignant une constante arbitraire.

D'où ce beau théorème dû à Dupin :

Si des rayons normaux à une même surface se réfractent sur une surface S, *ils sont encore, après leur réfraction, normaux à une même surface.*

4. Chaque rayon m se projette sur le plan tangent en M, suivant une droite faisant avec la droite MX un angle égal à φ. Toutes ces projections enveloppent des courbes que l'on peut, pour abréger, appeler la projection du système de rayons sur la surface. La fonction φ étant connue, on obtiendra l'équation différentielle de cette projection en posant $\varphi = i$; d'où

$$\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang} i = \frac{G\,dv}{E\,du}.$$

En remplaçant φ par i dans l'équation (1), il vient

$$\frac{d}{dv}(E\sin\theta\cos i) = \frac{d}{dv}(G\sin\theta\sin i),$$

ou encore

$$\frac{d}{dv}(E\sin\theta)\cos i - \frac{d}{du}(G\sin\theta)\sin i - E\sin\theta\sin i\,\frac{di}{dv}$$
$$- G\sin\theta\cos i\,\frac{di}{du} = 0,$$

ou, en remplaçant respectivement $\cos i$ et $\sin i$ par leurs valeurs,

$$\frac{\mathrm{E}\,du}{ds} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{G}\,dv}{ds},$$

$$\frac{d}{dv}(\mathrm{E}\sin\theta)\,\mathrm{E}\,du - \frac{d}{du}(\mathrm{G}\sin\theta)\,\mathrm{G}\,dv - \mathrm{EG}\sin\theta\,di = 0,$$

ou encore

$$di\sin\theta - \frac{du}{\mathrm{G}}\frac{d}{dv}(\mathrm{E}\sin\theta) + \frac{dv}{\mathrm{E}}\frac{d}{du}(\mathrm{G}\sin\theta) = 0.$$

Si θ est constant, on peut, dans la relation précédente, supprimer le facteur commun $\sin\theta$, et, en remplaçant respectivement $\frac{d\mathrm{E}}{dv}$ et $\frac{d\mathrm{G}}{du}$ par leurs valeurs $-\mathrm{GM}$ et EN, elle devient

$$di + \mathrm{M}\,du + \mathrm{N}\,dv = 0;$$

ce qui est précisément l'équation des lignes géodésiques.

D'où la proposition suivante :

Si des rayons émanant de chacun des points d'une surface S *sont normaux à une même surface, et si chacun d'eux fait un angle constant avec le plan tangent au point de* S *dont il émane, la projection du système de rayons sur* S *est un système de lignes géodésiques de cette dernière surface.*

5. La réciproque de cette proposition est également vraie. Considérons sur S un système de lignes géodésiques, nous choisirons les axes des u et des v, de telle sorte que ces lignes géodésiques soient définies par l'équation $v =$ const. Cela posé, cherchons les systèmes de rayons normaux à une même surface et ayant pour projection le système considéré de lignes géodésiques. Dans ce cas, on peut poser $\mathrm{E} = 1$ et $\mathrm{G} = \mathrm{F}(u)$, et l'angle dé-

signé par φ est égal à zéro, l'équation (1) devient alors

$$(2) \qquad \frac{d \sin\theta}{dv} = 0.$$

Cette équation étant identiquement satisfaite quand on fait $\theta =$ const., la réciproque de la proposition énoncée est démontrée. En particulier, si l'on fait $\theta = 0$, on obtient ce théorème bien connu :

Si l'on considère un système de lignes géodésiques tracées sur une surface, les tangentes aux différents points de ces lignes sont normales à une même surface.

6. On satisfait également à l'équation (2) en prenant pour θ une fonction arbitraire de u.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Étant donnés un système de lignes géodésiques tracées sur une surface et les trajectoires orthogonales de ces lignes, si par chaque point M *d'une de ces lignes on mène une droite située dans le plan tangent à cette ligne en* M *et normal à la surface, l'angle de cette droite avec le plan tangent étant constant le long d'une même trajectoire orthogonale, mais variant du reste d'une façon arbitraire quand on passe de l'une de ces trajectoires à une autre, toutes ces droites sont normales à une même surface.*