Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 130-144

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__130_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1232

(voir 2e série, t. XVI, p. 240),

PAR M. H. LEZ.

En un point M *d'une conique, on construit la parabole osculatrice et l'on prend le symétrique* P *du foyer de cette parabole par rapport à la tangente en* M : *démontrer que le point* M *et son symétrique* N *par rapport à* P *sont réciproques par rapport au cercle, lieu des sommets des angles droits circonscrits à la conique.*

(LAGUERRE.)

Prenant pour axe des x la normale au point M et pour axe des y la tangente au même point, on pourra écrire, pour l'équation de la conique,

$$ax^2 + 2hxy + y^2 - 2px = 0;$$

le centre de cette conique a pour coordonnées

$$x = \frac{p}{a - h^2}, \quad y = -\frac{ph}{a - h^2}.$$

Une tangente parallèle à la normale en M rencontrant l'axe des y en deux points donnés par l'équation

$$(h^2 - a)y^2 - 2hpy + p^2 = 0,$$

on détermine facilement le rayon R du cercle concentrique, lieu des angles droits circonscrits à la conique : il est égal à $\frac{p\sqrt{1+a}}{a-h^2}$.

L'équation de ce cercle est donc

$$\left(x - \frac{p}{a-h^2}\right)^2 + \left(y + \frac{ph}{a-h^2}\right)^2 = \frac{p^2(1+a)}{(a-h^2)^2}.$$

Les coordonnées du point N, pris sur OM de manière que OM.ON $= \mathrm{R}^2$, sont celles du pôle, par rapport au cercle en question, de la droite $x - hy = 0$ perpendiculaire à OM; on trouve pour leurs valeurs

$$x' = -\frac{p}{1+h^2}, \quad y' = \frac{hp}{1+h^2}.$$

L'équation d'une parabole tangente en M à l'axe des y peut s'écrire

$$m^2x^2 + 2mxy + y^2 - 2\lambda x = 0.$$

Retranchons-la de l'équation de la conique et écrivons que la seconde corde d'intersection

$$(a^2 - m^2)x + 2(h-m)y - 2(p-\lambda) = 0$$

se réduit à l'axe des y, il en résultera

$$m = h, \quad \lambda = p,$$

et l'on aura, pour l'équation de la parabole osculatrice,

$$(hx + y)^2 - 2px = 0.$$

A l'aide de formules connues, on trouve pour les coordonnées du foyer

$$x = \frac{p}{2(1+h^2)}, \quad y = \frac{ph}{2(1+h^2)};$$

son symétrique P par rapport à la tangente en M est donc le milieu du segment MN.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

Question 1237

(voir 2ᵉ série, t. XVI, p. 287);

PAR M. CAURET,

Professeur au lycée de Saint-Brieuc.

Ayant posé, pour abréger,

$$P = \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2-\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2},$$

$$Q = \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\alpha-\beta+\gamma+\delta}{2},$$

$$R = \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\alpha+\beta-\gamma+\delta}{2},$$

$$S = \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\alpha+\beta+\gamma-\delta}{2},$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *sont des entiers donnés, on propose de décomposer, au moyen de formules directes, l'expression*

$$P^2+Q^2+R^2+S^2$$

en deux facteurs représentés chacun par une somme de quatre carrés entiers. (S. REALIS.)

Posons

$$A = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2 \quad \text{et} \quad 2B = \alpha+\beta+\gamma+\delta,$$

il vient

$$P = \frac{A}{2} + B - \alpha, \quad Q = \frac{A}{2} + B - \beta,$$

$$R = \frac{A}{2} + B - \gamma, \quad S = \frac{A}{2} + B - \delta;$$

d'où

$$\begin{aligned}
P^2 + Q^2 + R^2 + S^2 &= A(A + 2B + 1) \\
&= (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \alpha + \beta + \gamma + \delta + 1) \\
&= \frac{1}{4}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)[(2\alpha + 1)^2 + (2\beta + 1)^2 + (2\gamma + 1)^2].
\end{aligned}$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Th. Franchy, maître répétiteur au lycée de Moulins, et Moret-Blanc.

Question 1241

(voir 2e série, t. XVI, p. 288);

PAR M. J. CHAMBON,
Élève du lycée de Bordeaux.

Trouver l'enveloppe d'un plan passant par les extrémités de trois diamètres conjugués d'un ellipsoïde. Montrer que ce lieu est le même que celui du centre de la section faite dans la surface par le plan variable.

(GENTY.)

Solution analytique. — Supposons l'ellipsoïde rapporté à son centre et à ses axes; son équation sera

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Si nous considérons un point (α, β, γ), le plan polaire de ce point sera

$$(1) \qquad \frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2} = 1;$$

et, pour que ce plan passe par les extrémités de trois diamètres conjugués, il suffit que α, β, γ satisfassent à la relation

$$(2) \qquad \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} = 3$$

$\left(\text{en se rappelant que } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 3\right.$ est le lieu des sommets des trièdres circonscrits à l'ellipsoïde et dont les faces sont parallèles à trois plans diamétraux conjugués$\Big)$.

Pour avoir l'enveloppe des plans représentés par l'équation (1), on n'a qu'à éliminer α, β, γ entre les équations (1), (2) et les suivantes :

$$\frac{f'_\alpha}{\varphi'_\alpha} = \frac{f'_\beta}{\varphi'_\beta} = \frac{f'_\gamma}{\varphi'_\gamma}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{\frac{x}{a^2}}{\frac{\alpha}{a^2}} = \frac{\frac{y}{b^2}}{\frac{\beta}{b^2}} = \frac{\frac{z}{c^2}}{\frac{\gamma}{c^2}}.$$

L'élimination se fait immédiatement, en mettant ces dernières équations sous la forme

$$\frac{\frac{\alpha x}{a^2}}{\frac{\alpha^2}{a^2}} = \frac{\frac{\beta y}{b^2}}{\frac{\beta^2}{b^2}} = \frac{\frac{\gamma z}{c^2}}{\frac{\gamma^2}{b^2}} = \frac{1}{3},$$

d'où l'on tire

$$\alpha = 3x, \quad \beta = 3y, \quad \gamma = 3z.$$

Le lieu cherché est donc

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{1}{3}.$$

C'est un ellipsoïde homothétique à l'ellipsoïde donné.

Il est facile de voir que ce lieu est le même que celui des centres des sections faites dans l'ellipsoïde par des plans satisfaisant aux conditions du problème. On sait, en effet, que le centre d'une section faite par un plan est le point d'intersection de ce plan avec le diamètre qui lui est conjugué. Pour avoir ce dernier lieu, il n'y aurait qu'à éliminer α, β, γ entre les trois relations

$$\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}+\frac{\gamma z}{c^2}=1,$$

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma},$$

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}=3.$$

Ce sont précisément les trois relations qui ont servi à trouver le lieu précédent.

Solution géométrique. — Considérons le parallélépipède construit sur trois demi-diamètres conjugués pris pour arêtes aboutissant au même sommet : le lieu du sommet opposé à celui-ci est un ellipsoïde dont les demi-axes sont $a\sqrt{3}$, $b\sqrt{3}$, $c\sqrt{3}$, a, b, c étant les demi-axes de l'ellipsoïde donné.

Or on sait que, si l'on mène le plan passant par les extrémités A, B, C des diamètres conjugués OA, OB, OC, ce plan coupe la diagonale du parallélépipède au tiers de sa longueur à partir du point O. On voit ainsi que le lieu M du sommet du parallélépipède opposé au sommet O, le lieu N du centre de la section faite par le plan ABC, sont deux ellipsoïdes homothétiques à l'ellipsoïde donné.

Cela étant admis, menons le diamètre conjugué au plan ABC et le plan tangent à l'ellipsoïde M au point où cet ellipsoïde est rencontré par le diamètre, ce plan tangent sera parallèle au plan ABC. Or l'enveloppe de ce plan tangent est l'ellipsoïde M; donc l'enveloppe du plan ABC est l'ellipsoïde N. C. Q. F. D.

Note. — Solutions analogues par MM. F. Pisani, professeur à Girgenti; Ch. Brunot, élève du lycée de Dijon; H. Dessoudeix, élève du lycée de Bordeaux; Moret-Blanc; V. Jamet, professeur au lycée de Saint-Brieuc; E. Dunoyer, élève du lycée de Marseille; Cl. Talon, élève au lycée de Moulins; P. Barbarin, élève de l'École normale.

Question 1248

(voir 2e série, t. XVI, p. 336);

PAR M. C. MOREAU,

Capitaine d'Artillerie.

Démontrer que $\sqrt{5}$ *est égal à la limite du rapport des deux séries*

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{13}+\ldots \quad \text{et} \quad \frac{1}{1}-\frac{1}{4}+\frac{1}{11}-\frac{1}{29}+\ldots,$$

dans lesquelles chacun des dénominateurs est donné par la relation

$$D_{n+2}=3D_{n+1}-D_n.$$

(E. Lucas.)

Lorsqu'une fonction de n est déterminée par l'équation

$$y_{n+2}=xy_{n+1}-y_n,$$

et par les conditions initiales

$$y_0=1,\quad y_1=x+a,$$

on peut représenter cette fonction par l'expression

$$y_n=\frac{1+az-(a+z)z^{2n+1}}{z^n(1-z^2)},$$

où z est l'une des deux racines de l'équation

$$z^2-xz+1=0.$$

Pour la première des deux séries proposées, on a

$$a=-1;$$

les dénominateurs successifs sont donc donnés par la formule

$$D_n = \frac{1 + z^{2n+1}}{z^n(1+z)},$$

et le terme général de la série est

$$(1+z)\frac{z^n}{1+z^{2n+1}}.$$

Pour la seconde série, $a = 1$; on a

$$D_n = \frac{1 - z^{2n+1}}{z^n(1-z)},$$

et, comme les signes sont alternés, le terme général est

$$(1-z)\frac{(-1)^n z^n}{1-z^{2n+1}}.$$

Il résulte de cela que le rapport des deux séries proposées est

$$\frac{1+z}{1-z}\,\frac{\left(\dfrac{1}{1+z} + \dfrac{z}{1+z^3} + \dfrac{z^2}{1+z^5} + \ldots\right)}{\left(\dfrac{1}{1-z} - \dfrac{z}{1-z^3} + \dfrac{z^2}{1-z^5} - \ldots\right)} = \frac{1+z}{1-z}\,\frac{f(z)}{\varphi(z)}.$$

Supposons maintenant que x soit plus grand que 2, et que l'on choisisse, pour z, celle des deux racines de l'équation donnée plus haut, qui est plus petite que l'unité; tous les termes de $f(z)$ et de $\varphi(z)$ pourront se développer en séries convergentes. Développons, par exemple, $f(z)$; on aura

$$f(z) = \left\{\begin{array}{l} 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - \ldots \\ + z - z^4 + z^7 - z^{10} + z^{13} - \ldots \\ + z^2 - z^7 + z^{12} - z^{17} + z^{22} - \ldots \\ + z^3 - z^{10} + z^{17} - z^{24} + z^{31} - \ldots \\ + z^4 - z^{13} + z^{22} - z^{31} + z^{40} - \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\},$$

et, en faisant les sommes des colonnes verticales, on retrouve les termes successifs de $\varphi(z)$. Ainsi $f(z) = \varphi(z)$, ce qui montre, en passant, que la fonction $f(z)$ est paire, puisque $\varphi(z)$ n'est autre chose que $f(-z)$; il s'ensuit, d'autre part, que le rapport des deux séries considérées se réduit à

$$\frac{1+z}{1-z} = \sqrt{\frac{1+z^2+2z}{1+z^2-2z}} = \sqrt{\frac{x+2}{x-2}}.$$

Dans le cas particulier de la question 1248, on a $x = 3$, et le rapport des deux séries est bien égal à $\sqrt{5}$.

Note. — La même question a été résolue par MM. J. de Virieu, professeur à Lyon; H.-J. Krantz, à Bréda.

Question 1249

(voir 2ᵉ série, t. XVI, p. 384);

PAR M. C. MOREAU,
Capitaine d'Artillerie.

On a la série rapidement convergente

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3.7} + \frac{1}{3.7.47} + \frac{1}{3.7.47.2207} + \ldots,$$

dans laquelle chacun des facteurs du dénominateur est égal au carré du précédent diminué de deux unités.

(E. Lucas.)

Soit posé

$$y_0 = 3, \quad y_1 = 7, \quad y_2 = 47, \quad \ldots,$$

et, en général,

$$y_n = y_{n-1}^2 - 2.$$

On peut évidemment représenter y_n par l'expression

$$y_n = x^{2^n} + \frac{1}{x^{2^n}},$$

où x est l'une quelconque des deux racines de l'équation

$$x^2 - 3x + 1 = 0.$$

On déduit de là

$$y_0 = \frac{1+x^2}{x}, \quad y_1 = \frac{1+x^4}{x^2}, \quad y_2 = \frac{1+x^8}{x^4}, \quad \ldots,$$

et la série proposée devient

$$\frac{1}{x}\left[\frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^4}{(1+x^2)(1+x^4)} + \frac{x^8}{(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)} + \ldots\right].$$

Or la série écrite entre crochets est connue : c'est un cas particulier de celle qui a fait l'objet de la question 1181 (*voir* t. XV, 2^e série, p. 135 et 180), et l'on sait qu'elle a pour limite 1 ou x^2, suivant que x est plus grand ou plus petit que l'unité.

Il résulte de cela que la somme de la série proposée est égale à la plus petite racine de l'équation $x^2 - 3x + 1 = 0$, c'est-à-dire à $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Autrement. — On peut toujours poser

$$\frac{y_0 - \alpha}{2} = \frac{1}{y_0} + \frac{1}{y_0 y_1} + \frac{1}{y_0 y_1 y_2} + \ldots,$$

et chercher à déterminer α.

Or, si l'on élimine successivement du second membre $y_0, y_1, y_2, \ldots$, on obtient

$$\frac{y_1 - \alpha y_0}{2} = \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_1 y_2} + \ldots,$$

$$\frac{y_2 - \alpha y_0 y_1}{2} = \frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_2 y_3} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{y_n - \alpha y_0 y_1 \ldots y_{n-1}}{2} = \frac{1}{y_n} + \frac{1}{y_n y_{n+1}} + \ldots.$$

Lorsque n augmente indéfiniment, le second membre de la dernière de ces égalités tend vers zéro; on a donc

$$\alpha = \lim \frac{y_n}{y_0 y_1 \cdots y_{n-1}}.$$

Cela posé, la relation générale

$$y_n = y_{n-1}^2 - 2$$

donne, par son élévation au carré,

$$y_n^2 - 4 = y_{n-1}^2 (y_{n-1}^2 - 4).$$

On en déduit facilement

$$y_n^2 - 4 = y_0^2 y_1^2 y_2^2 \cdots y_{n-1}^2 (y_0^2 - 4).$$

et l'on voit que

$$\lim \frac{y_n}{y_0 y_1 \cdots y_{n-1}} = \sqrt{y_0^2 - 4} = \alpha = \sqrt{5}.$$

Remarque. — On peut remarquer que l'on a, en général,

$$\left(\frac{1}{y_n} + \frac{1}{y_n y_{n+1}} + \frac{1}{y_n y_{n+1} y_{n+2}} + \cdots\right) = \left(\frac{1}{y_{n-1}} + \frac{1}{y_{n-1} y_n} + \cdots\right)^2.$$

Il est facile de voir également que

$$\left(1 - \frac{1}{y_0}\right)\left(1 - \frac{1}{y_1}\right)\left(1 - \frac{1}{y_2}\right) \cdots = \frac{\sqrt{5}}{4}.$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Vladimir Habbe, Moret-Blanc et J. de Virieu.

Question 1250

(voir 2ᵉ série, t. XVI, p. 384);

PAR M. C. MOREAU,
Capitaine d'Artillerie.

Recherche des lignes telles que la corde qui sous-tend leurs intersections avec les côtés d'un angle droit pivotant sur un point fixe enveloppe un cercle autour de ce point.

On sait que l'ellipse, rapportée à son centre, forme un cas particulier de cette catégorie de courbes.

(HATON DE LA GOUPILLIÈRE.)

Prenons, pour coordonnées d'un point quelconque M de la courbe cherchée, sa distance $OM = \rho$ au point fixe O choisi pour origine et l'angle $XOM = z$ que fait le rayon vecteur OM avec une droite quelconque OX passant par le point O. Menons le rayon vecteur $OM' = \rho'$ perpendiculaire sur OM, et traçons la hauteur OH du triangle OMM'.

Pour que la corde MM' enveloppe un cercle autour du point O lorsque l'angle droit MOM' pivote sur ce point, il faut et il suffit que la distance OH de cette corde à l'origine reste constante quand l'angle z varie; par suite, la relation

$$(1) \qquad \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho'^2} = \frac{1}{\overline{OH}^2},$$

existant entre les côtés de l'angle droit et la hauteur du triangle rectangle OMM', devra avoir lieu, avec une même valeur de OH, pour tous les couples de rayons vecteurs rectangulaires.

Cela posé, on peut toujours concevoir que l'équation de la courbe cherchée soit mise sous la forme

$$(2)\qquad \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{2r^2} + f(z),$$

r étant une constante.

Il s'ensuit

$$\frac{1}{\rho'^2} = \frac{1}{2r^2} + f\left(z + \frac{\pi}{2}\right),$$

et par conséquent

$$\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho'^2} = \frac{1}{r^2} + f(z) + f\left(z + \frac{\pi}{2}\right).$$

On voit donc que la condition (1) sera remplie si l'on a, quel que soit z,

$$(3)\qquad f\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = -f(z).$$

Ainsi l'équation (2) est l'équation générale des courbes jouissant de la propriété énoncée, si la fonction $f(z)$ satisfait à la seule condition de changer de signe lorsque la variable augmente de $\frac{\pi}{2}$; r est le rayon du cercle enveloppe des cordes correspondant à deux rayons vecteurs rectangulaires.

La fonction $f(z)$ est périodique; en effet, si, dans l'équation (3), on augmente z de $\frac{\pi}{2}$, il vient

$$f(z+\pi) = -f\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = f(z).$$

La période est π, ce qui montre que le point O est un centre de la courbe.

Cherchons à mettre $f(z)$ sous une forme plus explicite.

Si l'on ne considère que des fonctions ayant une valeur unique et bien déterminée pour chaque valeur de la variable, $f(z)$ ne peut être qu'une combinaison de fonctions simplement et doublement périodiques jouissant de cette même propriété et admettant la période π. Or les premières s'expriment au moyen de $\sin 2z$ et de $\cos 2z$; les secondes s'expriment au moyen des fonctions elliptiques qui, lorsqu'elles admettent la période π, peuvent aussi être représentées à l'aide de $\sin 2z$ et de $\cos 2z$; donc, en définitive, on pourra remplacer l'équation (2) par la suivante :

$$(4) \qquad \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{2r^2} + \varphi(\sin 2z, \cos 2z),$$

où φ désigne une fonction arbitraire soumise à la seule condition d'être impaire, c'est-à-dire de changer de signe lorsque les variables $\sin 2z$ et $\cos 2z$ changent elles-mêmes de signe toutes les deux en même temps.

Prenons pour exemple la fonction impaire simple

$$\varphi(\sin 2z, \cos 2z) = \frac{1}{2r^2}(p \sin 2z + q \cos 2z);$$

il en résulte

$$\rho^2 = \frac{2r^2}{1 + p \sin 2z + q \cos 2z},$$

ou, en coordonnées rectangulaires,

$$(1 + q)x^2 + (1 - q)y^2 + 2pxy = 2r^2,$$

équation d'une conique rapportée à son centre.

Dans le cas d'une ellipse dont les axes sont a et b, on a

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2};$$

le cercle enveloppe est toujours réel et fini.

Dans le cas de l'hyperbole, on a

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2};$$

le cercle enveloppe n'est réel et fini que si l'axe transverse est plus petit que l'axe non transverse.

Note. — La même question a été résolue par MM. Vladimir Habbé et Moret-Blanc.