NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MORET-BLANC

Concours d'admission à l'École polytechnique (1875)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 116-118

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__116_0>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1875);

PAR M. MORET-BLANC.

Une conique donnée de forme et de grandeur se déplace de manière que chacun de ses foyers reste sur une droite donnée. Dans chaque position, on mène à la conique des tangentes parallèles à la droite que décrit l'un des foyers. Déterminer le lieu des points de contact.

Soient $2c$ la distance des foyers, $2a$ et $2b$ les axes de la conique.

Je suppose d'abord que les deux droites données se rencontrent en un point O; je prends ce point pour origine des coordonnées rectangulaires, et la droite à laquelle les tangentes doivent être parallèles pour axe des x.

Soit

$$y = mx$$

l'équation de l'autre droite, α', $m\alpha'$ les coordonnées du foyer F' placé sur cette droite et α l'abscisse du foyer F placé sur la première. On a

$$(\alpha' - \alpha)^2 + m^2\alpha'^2 = 4c^2. \tag{1}$$

Soient M le point de contact d'une tangente parallèle à Ox, x et y ses coordonnées, FP, F'P' les perpendiculaires abaissées des foyers sur la tangente; on a, par un théorème connu,

$$FP.F'P' = b^2,$$

ou

(2) $$y(y - m\alpha') = b^2.$$

Les triangles rectangles FPM, F′P′M, ayant un angle aigu égal en M, donnent

(3) $$\frac{y}{\alpha - x} = \frac{y - m\alpha'}{x - \alpha'}.$$

En éliminant α et α' entre les équations (1), (2) et (3), on aura pour l'équation du lieu

$$x = \frac{y^2 - b^2}{my} \pm \frac{b^2\sqrt{4c^2y^2 - (y^2 - b^2)^2}}{y(y^2 + b^2)}.$$

L'équation ne changeant pas quand on change à la fois les signes de x et de y, il suffit de considérer les valeurs positives de y, on obtiendra ainsi une première partie de la courbe; la seconde sera symétrique de la première par rapport au point O.

Posons

$$X = \frac{b^2\sqrt{4c^2y^2 - (y^2 - b^2)^2}}{y(b^2 + y^2)},$$

et considérons d'abord le cas où la conique mobile est une ellipse. On a

$$x = \frac{y^2 - b^2}{my} \pm X,$$

y ne pouvant varier, pour la réalité de X, que de $a - c$ à $a + c$.

Si l'on construit entre ces ordonnées extrêmes l'arc d'hyperbole

$$x = \frac{y^2 - b^2}{my},$$

ayant pour asymptotes les deux droites données, ce sera une ligne diamétrale. A partir de chaque point de cette ligne, on portera vers les abscisses positives et négatives la valeur correspondante de X. Si y croît de $a-c$ à $a+c$, X croît de zéro à un maximum, puis décroît de ce maximum à zéro. On obtient ainsi un ovale incliné auquel il faut adjoindre son symétrique par rapport au point O. X atteint son maximum pour la valeur de y déterminée par l'équation

$$8a^2y^4=(y^2+b^2)^3,$$

obtenue en égalant la dérivée de X à zéro.

Si la conique mobile est une hyperbole, y croissant de $c-a$ à b, X croît de zéro à l'infini, puis y croissant de b à $c+a$, X décroît de l'infini à zéro. On obtient ainsi une courbe discontinue composée de deux branches ayant pour asymptote la droite $y=b$, du côté des abscisses positives et du côté des abscisses négatives. Il faut y joindre la courbe symétrique par rapport au point O. On a ainsi quatre branches présentant huit points d'inflexion.

Lorsque les deux droites données sont rectangulaires, la ligne diamétrale devient l'axe des y; les deux droites données sont deux axes de symétrie.

Si les droites données sont parallèles, en appelant $2d$ leur distance, on a

$$y^2-2dy=b^2,\quad \text{d'où}\quad y=d\pm\sqrt{d^2+b^2}.$$

Le lieu se compose de deux parallèles aux deux droites, ce qui était évident *a priori*.

Note. — La même question a été résolue par M. Gambey.