

J. GRIESS

Question de licence (1866)

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 17 (1878), p. 111-113

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__111_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1878, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUESTION DE LICENCE (1866);

PAR M. J. GRIESS,

a Zurich.

Trouver une courbe plane telle que la projection de son rayon de courbure sur une droite fixe située dans son plan ait une longueur constante.

La longueur du rayon de courbure est

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Le cosinus de l'angle du rayon de courbure avec la droite est égal au sinus de l'angle de la tangente avec la même droite. Si elle est prise comme axe des x , et que ω désigne ce dernier angle, on a

$$\text{tang} \omega = \frac{dy}{dx};$$

donc

$$\sin \omega = \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}},$$

donc la projection du rayon de courbure sera

$$\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \cdot \frac{\frac{dy}{dx}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}},$$

donc l'équation différentielle de la courbe sera

$$\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \frac{dy}{dx} = a, \quad a \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right].$$

Pour intégrer cette équation, je pose

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx};$$

donc on a

$$a \frac{dp}{dx} = p(1 + p^2).$$

Posons

$$p = \operatorname{tang} \omega,$$

on a

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{\cos^2 \omega} \frac{d\omega}{dx},$$

et il vient

$$a \frac{1}{\cos^2 \omega} \frac{d\omega}{dx} = \operatorname{tang} \omega \frac{1}{\cos^2 \omega},$$

$$a \frac{d\omega}{\operatorname{tang} \omega} = dx = a \frac{\cos \omega d\omega}{\sin \omega} = a \frac{d \sin \omega}{\sin \omega},$$

donc

$$\frac{x}{a} = l \sin \omega, \quad \sin \omega = e^{\frac{x}{a}};$$

on a maintenant

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang} \omega, \quad dy = \operatorname{tang} \omega dx,$$

$$dy = \operatorname{tang} \omega \frac{a d\omega}{\operatorname{tang} \omega} = a d\omega, \quad y = a\omega.$$

Éliminant ω , on a

$$\frac{y}{a} = \operatorname{arc} \sin \left(e^{\frac{x}{a}} \right).$$

Cette équation représente une série de courbes, tan-

gentes à l'axe des y en des points dont les ordonnées sont

$$a \frac{\pi}{2}, \quad a \frac{5\pi}{2}, \quad a \frac{9\pi}{2}, \quad \dots;$$

ces différentes courbes sont comprises entre des droites

$$x = 0 \quad \text{et} \quad x = a\pi, \quad x = 2a\pi \quad \text{et} \quad x = 3a\pi,$$

$$x = 2na\pi \quad \text{et} \quad x = (2n + 1)a\pi,$$

et elles ont en même temps ces différentes droites pour asymptotes. Elles sont toutes étendues vers le côté des x négatifs.