Remarques sur quelques points de la théorie des équations numériques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 104-106

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__104_1>

REMARQUES SUR QUELQUES POINTS DE LA THÉORIE DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES;

Par UN ABONNÉ.

1. Étant donné un polynôme $f(x)$, du degré n, on sait le rôle important que joue sa dérivée $f'(x)$ dans la résolution de l'équation $f(x) = 0$.

Dans la plupart des cas, on peut remplacer cette dérivée par le polynôme

$$\varphi(x) = (\lambda - x) f'(x) + n f(x),$$

qui renferme une constante arbitraire λ et qui, quel que soit λ, est généralement, ainsi que la dérivée, du degré $(n - 1)$.

2. Supposons, par exemple, qu'en effectuant sur $f(x)$ et $\varphi(x)$ l'opération du plus grand commun diviseur, en changeant de signe tous les restes, nous formions une suite de polynômes, f, φ, φ_1, φ_2, ..., analogues à ceux que l'on forme, dans la méthode de Sturm, en prenant pour point de départ les polynômes f et f'.

Sans entrer dans les détails de la démonstration, on voit clairement que, si l'on fait varier x, la suite des termes $f, \varphi, \varphi_1, \ldots$ ne peut perdre de variations que quand $f(x)$ s'annule. Dans ce cas, l'expression

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = n + (\lambda - x)\frac{f'(x)}{f(x)}$$

passe évidemment du positif au négatif, si $x > \lambda$, et du négatif au positif, si $x < \lambda$.

D'où la proposition suivante, due à M. Hermite (*):

Si, dans la suite des polynômes f, φ, φ_1, φ_2, ..., on substitue deux nombres α et β ($\alpha < \beta$), l'excès du nombre des variations de cette suite pour $x = \alpha$, sur le nombre des variations de cette suite pour $x = \beta$, est égal à l'excès du nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$, comprises entre α et β et plus petites que λ, sur le nombre de ces racines qui sont plus grandes que λ.

Il est clair que la proposition précédente peut servir aux mêmes usages que le théorème de Sturm, en ayant soin, lorsque l'on veut déterminer le nombre des racines réelles comprises entre α et β, de substituer le nombre λ dans la suite, si λ est compris entre α et β.

Je remarquerai maintenant que l'on peut toujours déterminer λ, de telle sorte que le polynôme $\varphi(x)$ s'abaisse au degré $(n - 2)$. On aura, par suite, une division de moins à faire que dans l'application de la méthode de Sturm; ce qui, dans certains cas, pourra être plus avantageux.

3. Je prendrai, comme second exemple, la séparation des racines d'une équation du cinquième degré.

M. Maleyx, qui a, dans ce Journal, publié plusieurs Notes intéressantes sur la séparation des racines (**), a

(*) *Mémoire sur l'équation du cinquième degré*, p. 31.

(**) *Nouv. Ann.*, 2e série, t. XI, p. 404, et t. XIII, p. 385.

remarqué que les racines de l'équation du cinquième degré pouvaient être séparées en résolvant deux équations du deuxième degré.

Le procédé suivant sera peut être plus commode dans la pratique.

En désignant par $f(x)$ un polynôme du cinquième degré, déterminons λ de telle sorte que le polynôme

$$\varphi(x) = (\lambda - x)f'(x) + 5f(x)$$

s'abaisse au troisième degré ; puis effectuons la division de f par φ. Nous obtiendrons l'équation

$$f = \varphi Q + R,$$

où Q et R sont des polynômes du second degré.

En remplaçant φ par sa valeur, la relation précédente peut s'écrire

$$f(1 - 5Q) = (\lambda - x)Qf'(x) + R;$$

on en conclut que les racines de $f(x) = 0$ sont séparées par les racines des équations

$$x - \lambda = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0,$$

dont une est du premier degré et deux du second seulement.