Nouvelles annales de mathématiques

G. de Longchamps

Sur le binôme de Newton

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 101-104

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__101_1>

SUR LE BINOME DE NEWTON;

PAR M. G. DE LONGCHAMPS,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Poitiers.

L'objet de cette Note est une démonstration de la formule du binôme, dans le cas d'un exposant entier. Cette démonstration est directe (*), elle repose simplement sur l'identité (**)

$$\left.\begin{array}{l} 1.2\ldots(y+1) \\ +\ 2.3\ldots(y+2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +\ (z-y)(z-y+1)\ldots z \end{array}\right\} = \frac{(z+1)z\ldots(z-y)}{y+2},$$

identité facile à vérifier (***)

En développant les premières puissances de $(x+a)$,

(*) *Voyez* sur ce sujet : E. CATALAN, *Nouvelles Annales*, p. 59, 1874, et LAURENT, *Algèbre*, 2e édition.

(**) Cette identité est un cas particulier de l'identité

$$\left.\begin{array}{l} x(x+1)(x+2)\ \ldots\ (x+y) \\ (x+1)(x+2)\ \ldots\ (x+y+1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (z-y)(z-y+1)\ \ldots\ (z-1)z \end{array}\right\} = \frac{(z+1)z\ldots(z-y)-(x+y)\ldots x(x-1)}{y+2},$$

proposee par M. Haton. Voyez *Nouvelles Annales*, p. 476; 1872.

(***) Elle est, en effet, évidente pour $z-y=1$, et l'on voit immédiatement que, si elle est vraie pour une certaine valeur de $z-y$, elle est encore vraie pour la valeur de $z-y$ supérieure d'une unité.

on aperçoit une loi, loi facile à généraliser et en vertu de laquelle on peut poser

$$(x+a)^m = x^m + A_{m,1}\,a\,x^{m-1} + A_{m,2}\,a^2x^{m-2} + \ldots \\ + A_{m,k}\,a^k x^{m-k} + \ldots + a^m.$$

Il s'agit donc de déterminer les coefficients $A_{m,1}$, $A_{m,2}$, ...

1. Multiplions les deux membres de l'égalité précédente par $x+a$, nous aurons

$$\begin{array}{l}(x+a)^{m+1} = x^{m+1} + A_{m,1} \left| \begin{array}{l} a\,x^m + A_{m,2} \\ \end{array} \right| a^2x^{m-2} + \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\;\; +\,1 \qquad\qquad\;\; + A_{m,1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + A_{m,k} \left| \begin{array}{l} x^{m-k+1} + \ldots + a^{m+1}. \\ \end{array} \right. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + A_{m,k-1}\end{array}$$

D'autre part, et d'après la notation que nous adoptons, on peut écrire

$$(x+a)^{m+1} = x^{m+1} + A_{m+1,1}\,a\,x^m + A_{m+1,2}\,a^2x^{m-4} + \ldots \\ + A_{m+1,k}\,a^k x^{m-k+1} + \ldots + a^{m+1}.$$

Identifions ces deux résultats; on aura d'abord

$$A_{m+1,1} = 1 + A_{m,1},$$

et par suite

$$A_{m,1} = 1 + A_{m-1,1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$A_{2,1} = 1 + A_{1,1}.$$

Ajoutons et remarquons que $A_{1,1} = 1$, on obtient

$$(1) \qquad A_{m+1,1} = \frac{m+1}{1}.$$

Cherchons $A_{m+1,2}$. On a

$$A_{m+1,2} = A_{m,2} + A_{m,1},$$

ou, puisque $A_{m,1} = m$, d'après l'égalité (1),

$$A_{m+1,2} = A_{m,2} + m.$$

par suite

$$A_{m,2} = A_{m-1,2} + (m-1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$A_{3,2} = A_{2,2} + 2.$$

Ajoutons et remarquons que $A_{2,2} = 1$, on trouve

$$(2) \qquad A_{m+1,2} = \frac{m(m+1)}{1.2}.$$

2. Les égalités (1) et (2) font pressentir la loi à laquelle obéissent les coefficients du développement de $(x+a)^m$. Nous admettrons donc que

$$A_{m,k} = \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{1.2\ldots k},$$

quelle que soit la valeur donnée à k, pourvu qu'elle soit entière et au plus égale à m, et nous allons démontrer que

$$(3) \qquad A_{m+1,k} = \frac{(m+1)m\ldots(m-k+2)}{1.2\ldots k}.$$

Égalons en effet les deux coefficients de $a^k x^{m-k+1}$ dans les deux développements de $(x+a)^{m+1}$, et nous aurons

$$A_{m+1,k} = A_{m,k} + A_{m,k-1},$$

par suite

$$A_{m,k} = A_{m-1,k} + A_{m-1,k-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$A_{k+1,k} = A_{k,k} + A_{k,k-1}.$$

Ajoutons; remarquons que $A_{k,k} = 1$ d'après l'identité (3), et remplaçons aussi

$$A_{k,k-1}, \quad \ldots, \quad A_{m-1,k-1}, \quad A_{m,k-1}$$

par leurs valeurs respectives tirées de cette identité transformée par le changement de k en $(k-1)$, nous obtenons

$$A_{m+1,k} = 1 + \frac{2.3\ldots k + 3.4\ldots(k+1) + \ldots + (m-k+2)\ldots m}{1.2\ldots(k+1)},$$

ou enfin, et en nous servant de l'identité citée au début de cette Note,

$$A_{m+1,k} = \frac{(m+1)m\ldots(m-k+2)}{1.2\ldots(k-1)k}.$$

La loi des coefficients est donc généralisée, et la formule du binôme établie.