

CH. BRISSE

Sur les débuts de la trigonométrie

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 16
(1877), p. 49-61

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__49_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1877, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES DÉBUTS DE LA TRIGONOMÉTRIE ;

PAR M. CH. BRISSÉ.

Des angles.

1. Deux droites qui se coupent déterminent quatre angles, deux à deux égaux et opposés par le sommet. On a trouvé utile de distinguer ces angles, et l'on y est parvenu à l'aide des conventions suivantes :

L'angle d'une droite indéfinie AA (fig. 1) avec une droite indéfinie BB est celui dont il faut faire tourner AA, autour de son point de rencontre O avec BB, dans le sens des aiguilles d'une montre, pour l'appliquer sur BB.

Fig. 1.

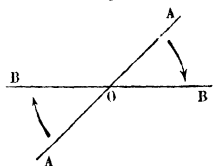
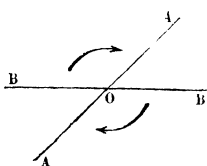


Fig. 2.



L'angle de la droite indéfinie BB (fig. 2) avec la droite indéfinie AA est celui dont il faut faire tourner BB, dans le sens des aiguilles d'une montre, pour l'appliquer sur AA.

De sorte que l'angle de AA avec BB n'est pas égal à celui de BB avec AA.

Dans cet ordre d'idées, on a remarqué que la droite AA (fig. 1), se trouvant appliquée sur BB, s'y trouvait encore appliquée, si l'on continuait à la faire tourner, après un demi-tour, deux demi-tours, etc. De sorte qu'en

appelant angle de AA avec BB la quantité dont il faut faire tourner AA, dans le sens des aiguilles d'une montre, pour l'appliquer sur BB, le mot *angle* prend une extension qu'il n'avait pas en Géométrie et se trouve défini, mais seulement à un nombre entier de demi-tours près.

La même remarque est applicable à l'angle de BB (fig. 2) avec AA.

Observant maintenant que, si l'on décrit du point O (fig. 3 et 4) une série de cercles concentriques, le rap-

Fig. 3.

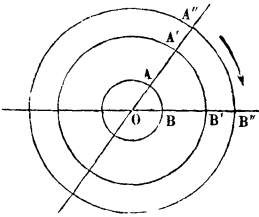
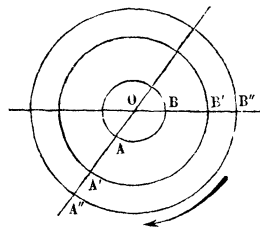


Fig. 4.



port des arcs interceptés sur ces cercles par les côtés d'un angle à leurs rayons respectifs est indépendant des rayons, on a pris ce rapport pour mesure de l'angle ; de sorte que le demi-tour, correspondant à une demi-circonférence, s'est trouvé exprimé par le nombre π .

L'angle de deux droites indéfinies AA et BB est donc complètement déterminé à un multiple près de π .

Dans certains cas, on a trouvé plus commode de tourner en sens contraire des aiguilles d'une montre. Pour distinguer ce cas du précédent, on a fait la convention suivante :

Quand une droite AA fait avec une droite BB un angle α , c'est qu'on peut amener la première sur la seconde en tournant de α dans le sens des aiguilles d'une

montre; mais, si l'on dit qu'une droite AA fait avec une droite BB un angle $-\alpha$, c'est qu'on peut amener la première sur la seconde en tournant de α *en sens contraire* des aiguilles d'une montre.

Ainsi (fig. 1 et 2), l'angle de AA avec BB étant α , on peut dire que celui de BB avec AA est $-\alpha$.

En faisant un demi-tour en sens contraire des aiguilles d'une montre, on tourne donc de $-\pi$, et comme, lorsqu'une droite est appliquée sur une autre, un demi-tour dans un sens ou dans l'autre l'y ramène, on peut dire que *l'angle de deux droites indéfinies est complètement déterminé, à un multiple près positif ou négatif de π .*

2. Si, au lieu de deux droites indéfinies, on donne deux droites parcourues dans un sens déterminé, c'est-à-dire deux *directions*, on appelle angle de la direction OA (fig. 5) avec la direction OB celui dont il faut faire tour-

Fig. 5.

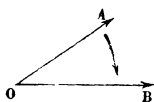
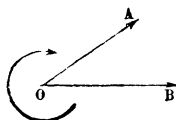


Fig. 6.



ner OA, dans le sens des aiguilles d'une montre, pour l'appliquer sur OB, et angle de la direction OB (fig. 6) avec la direction OA celui dont il faut faire tourner OB, dans le sens des aiguilles d'une montre, pour l'appliquer sur OA.

On peut remarquer qu'en continuant la rotation OA se trouve de nouveau appliqué sur OB, ou OB sur OA, après un tour, deux tours, etc.; de sorte que l'angle de OA avec OB, ou de OB avec OA, sera déterminé à un nombre entier de tours près, c'est-à-dire à un multiple près de 2π .

On peut également convenir qu'on désignera par des nombres négatifs les angles dont on tournera en sens contraire des aiguilles d'une montre; de sorte que *l'angle de deux directions est complètement déterminé à un multiple près positif ou négatif de 2π .*

Du cosinus.

3. Soit α l'un quelconque des angles de deux directions OM (*fig. 7* et 8) et OA. Abaissons d'un point M,

Fig. 7.

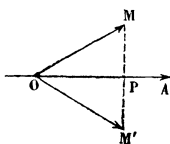
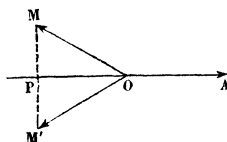


Fig. 8.



pris sur la première direction, une perpendiculaire sur la droite qui contient la seconde direction, et soit P le pied de cette perpendiculaire. Ou le point P tombera sur la direction OA (*fig. 7*), ou il tombera sur son prolongement (*fig. 8*). Dans le premier cas, le rapport $+\frac{OP}{OM}$,

et, dans le second cas, le rapport $-\frac{OP}{OM}$, c'est-à-dire le

rapport $\frac{OP}{OM}$, y compris un signe dépendant de la position du point P, sera, par définition, le *cosinus* de l'angle α .

Et, comme cet angle n'est défini qu'à un multiple près de 2π , il résulte de la définition que

$$\cos(2k\pi + \alpha) = \cos \alpha.$$

Si l'on prend le symétrique M' de M par rapport à OA, il est clair que, si, tournant dans le sens convenable sui-

vant le signe de α , on amène OM sur OA, en tournant en sens contraire, c'est-à-dire en décrivant $-\alpha$, on amènera OM' sur OA. La position du point P étant la même pour M et pour M', il en résulte que

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha.$$

Il est clair aussi que, si l'on prolonge OM (*fig. 9*), en sens contraire, d'une longueur égale à lui-même, le pied P de la perpendiculaire correspondante tombera, par rapport à O, du côté opposé au pied de la première; de sorte que le rapport $\frac{OP}{OM}$ ne changera pas de valeur numérique, mais que, le point P passant de OA sur son prolonge-

Fig. 9.

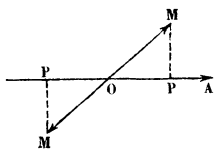
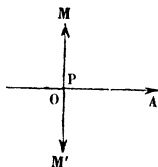


Fig. 10.



ment, ou *vice versa*, le cosinus changera de signe. Or on passe de OM à son prolongement en tournant d'un nombre quelconque positif ou négatif de demi-tours; donc

$$\cos[(2k+1)\pi + \alpha] = -\cos \alpha,$$

et, en changeant α en $-\alpha$,

$$\cos[(2k+1)\pi - \alpha] = -\cos(-\alpha) = -\cos \alpha.$$

Si le point P (*fig. 10*) tombait en O, le rapport $\frac{OP}{OM}$ serait nul, et, comme on amènerait alors OM sur OA en tournant d'un quart de tour ou de $\frac{\pi}{2}$, et OM' sur OA en

tournant de $-\frac{\pi}{2}$, à un multiple près de 2π , il en résulte

$$\cos\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \cos\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

D'ailleurs on passe de OM à OM', ou inversement, en tournant d'un nombre quelconque positif ou négatif de demi-tours; donc

$$\cos\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \cos\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

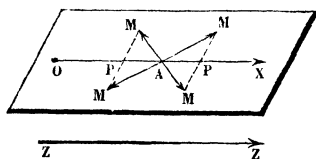
Enfin, OM (*fig. 9*) étant une oblique et OP une perpendiculaire par rapport à MP, la valeur absolue du rapport $\frac{OP}{OM}$ est nécessairement comprise entre zéro et 1, de sorte que le cosinus ne peut prendre que des valeurs comprises entre +1 et -1. Les points M et P se confondant quand OM coïncide avec OA ou avec son prolongement, c'est-à-dire quand l'angle est égal à $2k\pi$ ou à $(2k+1)\pi$, on a

$$\cos 2k\pi = 1, \quad \cos(2k+1)\pi = -1.$$

Des projections.

4. Considérons une direction fixe ZZ (*fig. 11*) et un

Fig. 11.



segment limité de droite AM parcouru dans le sens AM, la direction ZZ et le segment AM étant ou non dans

un même plan. Par l'origine A du segment, menons une parallèle AX à la direction fixe, et abaissons de son extrémité M une perpendiculaire MP sur AX. Soit α l'un quelconque des angles que fait AM avec AX, quand on se place d'un certain côté du plan MAX, cet angle étant $-\alpha$ si l'on se place de l'autre côté, puisqu'on voit alors tourner les aiguilles d'une montre en sens contraire. Que l'on soit d'un côté ou de l'autre, puisque $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, on a, si P tombe sur AX,

$$+ \frac{AP}{AM} = \cos\alpha,$$

et, s'il tombe sur son prolongement,

$$- \frac{AP}{AM} = \cos\alpha;$$

d'où l'on conclut, dans le premier cas,

$$+ AP = AM \cos\alpha,$$

et, dans le second,

$$- AP = AM \cos\alpha.$$

Ce produit de la *valeur absolue* de AM par le cosinus de l'angle que fait la direction AM avec la direction AX est, par définition, la *projection de AM sur cette direction*.

Soit O une origine située suffisamment loin vers la gauche pour que les pieds P de toutes les perpendiculaires qu'il y aura lieu de considérer tombent tous à sa droite, et proposons-nous, un mobile cheminant sur la direction AM, d'évaluer à chaque instant la distance OP de sa projection au point O, connaissant la distance primitive OA de son point de départ.

On aura, dans le premier cas, si P tombe sur AX,

$$OP = OA + AP \quad \text{ou} \quad OP = OA + AM \cos\alpha,$$

puisque

$$+ AP = AM \cos \alpha,$$

et, dans le second, s'il tombe sur son prolongement,.

$$OP = OA - AP \quad \text{ou} \quad OP = OA + AM \cos \alpha,$$

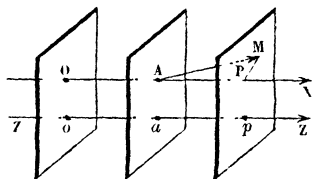
puisque

$$- AP = AM \cos \alpha;$$

c'est-à-dire que, dans tous les cas, *la distance au point O de la projection du point M est égale à sa distance primitive augmentée de la projection de AM.*

Il est clair qu'au lieu de mener par le point A une parallèle à ZZ et d'abaisser du point M une perpendiculaire sur cette parallèle, on peut, des points O, A et M, mener des plans perpendiculaires à ZZ (*fig. 12*); car,

Fig. 12.



d'abord, l'angle de deux directions est indépendant de leur position, et ensuite oa et OA , ap et AP , op et OP sont égales comme parallèles comprises entre plans parallèles, de sorte qu'on a toujours

$$op = oa + AM \cos \alpha \quad \text{ou} \quad op = oa + \text{proj. de } AM.$$

Cela posé, considérons un polygone fermé quelconque, plan ou gauche, ayant $A, A_1, A_2, \dots, A_{m-1}$ pour sommets, et parcourons-le dans le sens $AA_1 \dots A_{m-1}A$, de manière à revenir au point de départ. Projetons à chaque instant le point décrivant sur ZZ; quand il coïncidera

successivement avec les différents sommets du polygone, la distance au point o de sa projection sera successivement

$$oa, oa + \text{proj. de } AA_1, oa + \text{proj. de } AA_1 + \text{proj. de } AA_2, \dots, \\ oa + \text{proj. de } AA_1 + \dots + \text{proj. de } A_{m-1}A.$$

Mais, puisqu'on est revenu au point de départ A , la projection est revenue à son point de départ a , et elle est à la distance oa du point o ; donc

$$oa + \text{proj. de } AA_1 + \text{proj. de } A_1A_2 + \dots + \text{proj. de } A_{m-1}A = oa,$$

d'où

$$\text{proj. de } AA_1 + \text{proj. de } A_1A_2 + \dots + \text{proj. de } A_{m-1}A = 0,$$

c'est-à-dire que *la somme des projections d'un polygone fermé quelconque, plan ou gauche, parcouru dans un certain sens, sur une direction fixe, est égale à zéro.*

C'est dans cette proposition que consiste le *théorème des projections*.

Du sinus.

5. Comme première application du théorème des projections, soit, dans un plan, α l'un quelconque des angles de deux directions OM et OA . Abaissons d'un point M , pris sur la première direction, une perpendiculaire sur la droite qui contient la seconde direction, et soit P le pied de cette perpendiculaire. Projetons le contour fermé $OPMO$ sur une direction OL faisant avec OA un angle égal à $\frac{\pi}{2}$.

Le point P tombant sur OA ou sur son prolongement, OP fait avec OL un angle égal à $-\frac{\pi}{2}$ ou à $+\frac{\pi}{2}$; mais

$\cos\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = 0$; donc sa projection $OP \cos\left(\pm \frac{\pi}{2}\right)$ est nulle.

PM étant perpendiculaire sur OA fait avec elle un angle égal à $+\frac{\pi}{2}$ ou à $-\frac{\pi}{2}$. Pour trouver l'angle de PM avec OL, ramenons d'abord PM sur OA en tournant de $+\frac{\pi}{2}$ ou de $-\frac{\pi}{2}$, puis OA sur OL en tournant de $-\frac{\pi}{2}$; l'angle cherché sera $+\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire 0 ou $-\pi$. La projection de PM sera donc $PM \cos 0$ ou $PM \cos(-\pi)$, c'est-à-dire $+PM$ ou $-PM$.

MO étant dirigée en sens inverse de OM fait avec elle un angle égal à π . Pour trouver l'angle de MO avec OL, ramenons d'abord MO sur OM en tournant de π , puis OM sur OA en tournant de α , puis OA sur OL en tournant de $-\frac{\pi}{2}$; l'angle cherché sera $\pi + \alpha - \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $\frac{\pi}{2} + \alpha$. La projection de MO sera donc

$$MO \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \quad \text{ou} \quad -MO \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

La somme des projections étant nulle, il en résulte

$$+PM - MO \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 0,$$

ou

$$-PM - MO \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = 0.$$

Les angles α et $\frac{\pi}{2} - \alpha$, dont la somme algébrique est égale à $\frac{\pi}{2}$, sont dits *complémentaires*, et le cosinus du complément d'un angle est dit le *sinus* de cet angle; de

sorte que l'on a, par définition,

$$\sin \alpha = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right),$$

et que les relations précédentes deviennent

$$+ \frac{PM}{MO} = \sin \alpha \quad \text{ou} \quad - \frac{PM}{MO} = \sin \alpha,$$

suivant que PM fait avec OA un angle égal à $+\frac{\pi}{2}$ ou à $-\frac{\pi}{2}$. Le rapport $\frac{PM}{MO}$, y compris un signe dépendant de l'angle que fait la direction PM avec la direction OA, sera donc le sinus de l'angle α .

En changeant, dans les différentes formules établies pour le cosinus, α en $\frac{\pi}{2} - \alpha$, on obtient les suivantes :

$$\begin{aligned} \sin(2k\pi + \alpha) &= \sin \alpha, & \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha, \\ \sin[(2k+1)\pi + \alpha] &= -\sin \alpha, & \sin[(2k+1)\pi - \alpha] &= \sin \alpha, \\ \sin k\pi &= 0, & \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) &= 1, & \sin\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}\right) &= -1. \end{aligned}$$

Des formules d'addition.

6. Comme deuxième application du théorème des projections, soient, dans un plan, a l'un quelconque des angles de deux directions OM et OA, b celui d'une nouvelle direction ON avec OM. Abaissons d'un point N, pris sur la direction ON, une perpendiculaire sur la droite qui contient la direction OM, et soit P le pied de cette perpendiculaire. Projetons le contour fermé OPNO sur la direction OA.

Si le point P tombe sur OM, la valeur absolue de OP est $ON \cos b$, d'après la définition du cosinus; OP fait

alors avec OA le même angle que OM, c'est-à-dire l'angle a , de sorte que sa projection est $ON \cos b \cos a$.

Si le point P tombe sur le prolongement de OM, la valeur absolue de OP est $-ON \cos b$. Pour trouver l'angle de OP avec OA, ramenons d'abord OP sur OM en tournant de π , puis OM sur OA en tournant de a ; l'angle cherché sera $\pi + a$. La projection de OP sera donc $-ON \cos b \cos(\pi + a)$ ou $ON \cos b \cos a$, comme précédemment.

Si PN fait avec OM un angle égal à $\frac{\pi}{2}$, sa valeur absolue est $ON \sin b$, d'après ce qu'on a vu pour le sinus. Pour trouver l'angle de PN avec OA, ramenons d'abord PN sur OM en tournant de $\frac{\pi}{2}$, puis OM sur OA en tournant de a ; l'angle cherché sera $\frac{\pi}{2} + a$. La projection de PN sera donc $ON \sin b \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right)$ ou $-ON \sin b \sin a$.

Si PN fait avec ON un angle égal à $-\frac{\pi}{2}$, sa valeur absolue est $-ON \sin b$. Pour trouver l'angle de PN avec OA, ramenons d'abord PN sur OM en tournant de $-\frac{\pi}{2}$, puis OM sur OA en tournant de a ; l'angle cherché sera $-\frac{\pi}{2} + a$. La projection de PN sera donc

$$-ON \sin b \cos\left(-\frac{\pi}{2} + a\right) \quad \text{ou} \quad -ON \sin b \sin a,$$

comme précédemment.

NO étant dirigée en sens inverse de ON fait avec elle un angle égal à π . Pour trouver l'angle de NO avec OA, ramenons d'abord NO sur ON en tournant de π , puis ON sur OM en tournant de b , puis OM sur OA en tournant

(61)

de a ; l'angle cherché sera $\pi + b + a$. La projection de NO sera donc $ON \cos(\pi + b + a)$ ou $- ON \cos(b + a)$.

La somme des projections étant nulle, il en résulte

$$ON \cos b \cos a - ON \sin b \sin a - ON \cos(b + a) = 0,$$

ou

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

Changeons b en $-b$,

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

Changeons maintenant a en $\frac{\pi}{2} - a$,

$$\cos\left[\frac{\pi}{2} - (a + b)\right] = \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

Changeons enfin b en $-b$,

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$$

(*A suivre.*)