

H. LAURENT

Théorie élémentaire des fonctions elliptiques

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 16
(1877), p. 433-450

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__433_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1877, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES;

PAR M. H. LAURENT.

[SUITE (*).]

ÉTUDE ET DISCUSSION DE LA FONCTION $\sin am x$.

Considérons l'intégrale

$$(1) \quad x = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2x^2)}},$$

qui est la plus simple de celles auxquelles se ramènent les intégrales que nous avons considérées plus haut. Legendre posait

$$y = \sin \varphi,$$

il obtenait alors la relation

$$x = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}};$$

φ était ce qu'il appelait l'amplitude de l'intégrale x . Alors, en posant $\varphi = am x$, on a

$$y = \sin am x;$$

le nom de $\sin am x$ est resté à y considéré comme fonction de x . Nous adopterons la notation de Gudermann, plus simple que la précédente, due à Jacobi, et nous aurons

$$\begin{aligned} y &= \sin am x = \operatorname{sn} x, \\ \sqrt{1-y^2} &= \cos am x = \operatorname{cn} x, \\ \sqrt{1-k^2y^2} &= \operatorname{dn} x, \\ \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} &= \operatorname{tang} am x = \operatorname{tn} x. \end{aligned}$$

(*) *Nouvelles Annales*, 2^e série, t. XVI, p. 78, 211, 361, 385.*Ann. de Mathémat.*, 2^e série, t. XVI. (Octobre 1877.) 28

Nous reviendrons d'ailleurs sur ces formules pour en préciser le sens et déterminer le signe qui convient à chaque radical. Dans ce qui va suivre, k sera quelconque, mais, dans la pratique, k sera généralement réel et moindre que l'unité.

D'après ce qu'on a vu au paragraphe précédent :

1° La fonction $\operatorname{sn} x$ sera continue, monodrome et homogène dans toute l'étendue du plan.

2° Elle possédera deux périodes, l'une

$$2 \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} - 2 \int_0^{-1} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}},$$

correspondant aux deux lacets successifs et relatifs aux points critiques -1 et $+1$. Nous l'appellerons $4K$; nous observerons qu'elle est réelle quand k est réel, et d'ailleurs moindre que l'unité en valeur absolue,

$$K = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}};$$

l'autre période est

$$2 \int_0^1 \frac{dy}{\Delta} - 2 \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dy}{\Delta},$$

Δ désignant, pour abrégier, le radical; on peut le représenter par $2K' \sqrt{-1}$, en posant

$$K' \sqrt{-1} = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dy}{\Delta}.$$

Si l'on fait

$$k^2 + k'^2 = 1, \quad 1 - k^2y^2 = t^2,$$

on trouve

$$K' = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}}.$$

k est ce que l'on appelle le *module*,

k' est le *module complémentaire*,

K est l'*intégrale complète*,

K' est l'*intégrale complète complémentaire*.

Ainsi les côtés du parallélogramme des périodes sont $4K$ et $2K'\sqrt{-1}$.

3° La fonction $\operatorname{sn} x$ passe deux fois par la même valeur dans le parallélogramme, et, d'après la discussion faite au paragraphe précédent,

$$\operatorname{sn}(2K - x) = \operatorname{sn} x.$$

4° La fonction $\operatorname{sn} x$ s'annule en particulier deux fois dans chaque parallélogramme, et comme on a évidemment $\operatorname{sn} 0 = 0$, les zéros de $\operatorname{sn} x$ sont donnés par les formules 0 et $2K$, ou, plus généralement,

$$\left. \begin{array}{l} 4Km + 2K'n\sqrt{-1} \\ 2(2m + 1)K + 2K'n\sqrt{-1} \end{array} \right\} \text{ou } 2Km + 2K'n\sqrt{-1}.$$

5° Cherchons les infinis de $\operatorname{sn} x$. L'un d'eux sera donné par la formule

$$\alpha = \int_0^{\infty} \frac{dy}{\Delta} \quad \text{ou} \quad 2\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\Delta},$$

et l'on peut supposer que le contour d'intégration soit rectiligne en laissant d'un même côté de lui-même les points critiques $+1$ et $+\frac{1}{k}$, et, de l'autre côté, -1 et

$-\frac{1}{k}$; mais un tel contour peut être remplacé par un demi-cercle de rayon infini décrit sur lui-même comme diamètre, à la condition d'y adjoindre les deux lacets relatifs aux points critiques. Or le contour circulaire

donne une intégrale nulle ; on a donc

$$2x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\Delta} = 2 \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dy}{\Delta} = 2K' \sqrt{-1},$$

et, par suite,

$$x = K' \sqrt{-1}.$$

Ainsi l'un des infinis de $\operatorname{sn} x$ est $K' \sqrt{-1}$, et, comme $\operatorname{sn}(2K - x) = \operatorname{sn} x$, un autre infini sera $2K - K' \sqrt{-1}$.
En général, les infinis de $\operatorname{sn} x$ seront

$$\left. \begin{aligned} & 4mK + (2n + 1)K' \sqrt{-1} \\ & 2(2m + 1)K + (2n + 1)K' \sqrt{-1} \end{aligned} \right\} \text{ou } 2Km + (2n + 1)K' \sqrt{-1}.$$

6° On a, comme il est facile de le voir,

$$\operatorname{sn} x = -\operatorname{sn}(-x).$$

7° $\operatorname{sn} K' \sqrt{-1}$ étant infini, posons, dans l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)},$$

$y = \frac{1}{kz}$, $x = K' \sqrt{-1} + t$: nous aurons

$$\frac{dz}{dt} = \mp \sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)};$$

d'où nous concluons, z s'annulant avec t ,

$$z = \pm \operatorname{sn} t = \pm \operatorname{sn}(-K' \sqrt{-1} + x) = \pm \operatorname{sn}(K' \sqrt{-1} + x),$$

et, par suite,

$$\operatorname{sn}(K' \sqrt{-1} + x) = \frac{\pm 1}{k \operatorname{sn} x},$$

d'où l'on tire

$$\operatorname{sn} K' \sqrt{-1} = \infty.$$

8° Enfin l'on a

$$\operatorname{sn}(K) = 1, \quad \operatorname{sn}(K + K' \sqrt{-1}) = \frac{1}{k}.$$

SUR LES FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES.

La discussion faite au paragraphe précédent nous a révélé l'existence de fonctions monodromes et monogènes possédant deux périodes. Ces fonctions (et les fonctions elliptiques sont les plus simples d'entre elles) jouissent de propriétés communes qui peuvent en simplifier l'étude; nous commencerons par faire connaître ces propriétés.

Sans doute une bonne partie de la théorie des fonctions elliptiques pourrait être faite, et même a été édiflée avant la découverte, toute récente, de ces propriétés; mais leur connaissance explique bien des méthodes d'investigation qui pourraient, sans cela, être regardées comme des artifices de calcul heureux, mais peu propres à éclairer sur la méthode d'invention.

THÉOREME I. — *Il n'existe pas de fonction monodrome et monogène possédant deux périodes réelles et distinctes.*

En effet, si la fonction $f(x)$ possédait les deux périodes ω et ϖ , on aurait

$$f(x + m\omega + n\varpi) = f(x),$$

m et n désignant deux entiers quelconques. Or, si ω et ϖ sont commensurables, soit α leur plus grande commune mesure et

$$\omega = k\alpha, \quad \varpi = l\alpha.$$

Si l'on pose

$$mk + nl = 1,$$

cette équation aura toujours une solution, car k et l sont premiers entre eux. On aura donc

$$mk\alpha + nl\alpha = \alpha \quad \text{ou} \quad m\omega + n\varpi = \alpha,$$

par suite

$$f(x + \alpha) = f(x);$$

α serait donc une période et ω et ϖ seraient ses multiples. Si ω et ϖ sont incommensurables, on pourra toujours satisfaire à la formule

$$m\omega + n\varpi = \varepsilon,$$

où ε est très-petit. Il suffit, en effet, pour cela, de réduire $\frac{\varpi}{\omega}$ en fraction continue : soit $\frac{p}{q}$ une réduite quelconque, $\frac{p'}{q'}$ la réduite suivante; $\frac{\varpi}{\omega}$ sera compris entre ces deux réduites dont la différence $\frac{1}{qq'}$ tend vers zéro. On pourra donc poser

$$\frac{\varpi}{\omega} = \frac{p}{q} + \frac{\theta}{qq'}$$

et

$$m\omega + n\varpi = \omega \left[m + n\frac{p}{q} + n\frac{\theta}{qq'} \right] = \omega \left[\frac{mq + np}{q} + \frac{n\theta}{qq'} \right].$$

Or on peut, en supposant $\frac{p}{q}$ irréductible (ce qui a lieu pour les réduites d'une fraction continue), prendre $mq + np = 1$; mais m et n sont le numérateur et le dénominateur de la réduite qui précède $\frac{p}{q}$; donc $\frac{n}{q'} < 1$ et $m\omega + n\varpi$ se réduit à une quantité moindre que $\frac{2\omega}{q}$, c'est-à-dire aussi petite que l'on veut ε . On aurait donc

$$f(x + \varepsilon) = f(x) \quad \text{ou} \quad f(x + \varepsilon) - f(x) = 0,$$

ε étant aussi petit que l'on veut. La fonction

$$f(x + \varepsilon) - f(x) = 0$$

admettrait donc une infinité de racines $\varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, \dots$ dans un espace fini du plan; l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{f'(x+z)}{f(x+z) - f(x)} dz$$

serait donc infinie, ce qui est absurde. Il est évident que deux périodes dont le rapport est réel ne peuvent pas coexister non plus. En effet, soit r le rapport des périodes; on pourra poser

$$\omega = r\omega,$$

et l'on aura

$$f(x - \omega) = f(x), \quad f(x + r\omega) = f(x)$$

ou

$$F\left(\frac{x}{\omega} + 1\right) = F\left(\frac{x}{\omega}\right), \quad F\left(\frac{x}{\omega} + r\right) = F\left(\frac{x}{\omega}\right),$$

en désignant par $F\left(\frac{x}{\omega}\right)$ la fonction $f(x)$: x étant quelconque, on aurait

$$F(x + 1) = F(x), \quad F(x + r) = F(x),$$

et la fonction F aurait les périodes réelles 1 et r .

THÉORÈME II. — *Une fonction monodrome, monogène et continue ne saurait avoir plus de deux périodes.*

En effet, soient $a + b\sqrt{-1}, a' + b'\sqrt{-1}, a'' + b''\sqrt{-1}$ trois périodes de la fonction $f(x)$, s'il est possible. Je dis que l'on pourra toujours trouver trois entiers m, m', m'' , tels que l'on ait

$$a''' = ma + m'a' + m''a'' < \varepsilon,$$

$$b''' = mb + m'b' + m''b'' < \varepsilon,$$

ε étant un nombre si petit que l'on voudra. En effet,

considérons la quantité

$$a'''b'' - b'''a'' = m(ab'' - ba'') + m'(a'b'' - b'a'');$$

on pourra toujours, comme on l'a vu dans la démonstration du théorème précédent, choisir m et m' de telle sorte que $a'''b'' - b'''a''$ soit moindre qu'une quantité donnée, et même de telle sorte que l'on ait

$$a''' - b''' \frac{a''}{b''} \text{ ou } m \frac{ab'' - ba''}{b''} + m' \frac{a'b'' - b'a''}{b''} < \delta,$$

c'est-à-dire en valeur absolue

$$(1) \quad a''' < \delta + b''' \frac{a''}{b''};$$

mais m et m' ayant été ainsi déterminés, on pourra toujours choisir m'' de telle sorte que l'on ait en valeur absolue

$$\frac{b'''}{b''} \text{ ou } \frac{mb''}{b''} + m' \frac{b'}{b''} + m'' < \frac{1}{2},$$

et, par conséquent,

$$(2) \quad \frac{b''' a''}{b''} < \frac{1}{2} a''.$$

On pourra donc, en vertu de (1), prendre

$$a''' < \delta + \frac{(a'')}{2},$$

(a'') désignant la valeur absolue de a'' , ou, en définitive, prendre $a''' \leq \frac{(a'')}{2}$. Or, de (2), on tire $b''' < \frac{(b'')}{2}$; ainsi on pourra prendre a''' et b''' moindres en valeur absolue que les demi-valeurs absolues de a'' et b'' . Cela étant, considérons les quantités

$$\begin{aligned} a^{iv} &= n' a' + n'' a'' + n''' a''', \\ b^{iv} &= n' b' + n'' b'' + n''' b'''; \end{aligned}$$

on pourra choisir les entiers n' , n'' , n''' de telle sorte que l'on ait en valeur absolue $a^{1v} < \frac{a'''}{2}$, $b^{1v} < \frac{b'''}{2}$. On pourra déterminer d'une façon analogue des nombres $a^v < \frac{a^{1v}}{2}$, $b^v < \frac{b^{1v}}{2}$, et ainsi de suite; mais a''' , a^{1v} , a^v , ... sont des fonctions linéaires à coefficients entiers de a , a' , a'' ; de même b''' , b^{1v} , b^v , ... sont des fonctions linéaires à coefficients entiers de b , b' , b'' ; ces fonctions linéaires vont en décroissant, au moins aussi rapidement que les termes de la progression géométrique de raison $\frac{1}{2}$; donc elles peuvent être prises moindres que toute quantité donnée.

C. Q. F. D.

Si donc la fonction $f(x)$ admettait les trois périodes $a + b\sqrt{-1}$, $a' + b'\sqrt{-1}$, $a'' + b''\sqrt{-1}$, elle admettrait une période $a^{(i)} + b^{(i)}\sqrt{-1}$ de module aussi petit que l'on voudrait; $f(x + \varepsilon) - f(x) = 0$ aurait donc une infinité de racines dans un espace limité, ce qui est absurde. Il n'y aurait d'exception à cette conclusion que si l'un des nombres a_i et son correspondant b_i s'annuleraient rigoureusement. Mais alors, en appelant ω , ω' , ω'' , pour abrégé, les trois périodes et en désignant par m , m' , m'' trois entiers, on aurait

$$(1) \quad m\omega + m'\omega' + m''\omega'' = 0.$$

Soient n_1 le plus grand commun diviseur de m et m' , et μ , μ' les quotients de m et m' par n_1 ; si l'on pose

$$\begin{aligned} \mu\omega + \mu'\omega' &= \omega_1, \\ n\omega + n'\omega' &= \omega_1, \end{aligned}$$

on pourra toujours choisir n et n' de telle sorte que le déterminant $\mu n' - n \mu'$ soit égal à 1 pour des valeurs entières de n et n' ; alors ω et ω' s'exprimeront en fonc-

tions linéaires de ω'_1 et ω_1 , à coefficients entiers. On aura ensuite, au lieu de (1),

$$m'_1 \omega'_1 + m'' \omega'' = 0.$$

Divisant les deux membres de cette formule par le plus grand commun diviseur de m'_1 et de m'' , elle prend la forme

$$\mu'_1 \omega'_1 + \mu'' \omega'' = 0,$$

et si l'on prend $n'_1 \mu'' - n'' \mu'_1 = 1$, ce qui est possible, et si l'on pose

$$n'_1 \omega'_1 + n'' \omega'' = \omega''_2,$$

ω'_1 et ω'' seront des multiples de ω''_2 . En résumé, ω et ω' sont fonctions linéaires et à coefficients entiers de ω'_1 et de ω_1 , c'est-à-dire de ω''_2 et de ω_1 . Il en est de même de ω'' ; nos trois périodes se réduisent donc à deux de la forme $p\omega''_2 + q\omega_1$, p et q désignant des entiers.

THÉORÈME DE M. HERMITE.

THÉORÈME. — *L'intégrale d'une fonction doublement périodique prise le long d'un parallélogramme de périodes est nulle.*

Ce théorème, ou plutôt cette remarque fondamentale, est due à M. Hermite : elle est presque évidente. En effet, le long de deux côtés opposés, la fonction prend les mêmes valeurs, mais la différentielle de la variable y prend des valeurs égales et de signes contraires; la somme des intégrales prises le long des côtés opposés est donc nulle, et il en est de même de l'intégrale totale.

PREMIÈRE CONSÉQUENCE. — Une fonction doublement périodique s'annule au moins une fois et devient infinie au moins une fois dans chaque parallélogramme des périodes, car sans quoi elle ne deviendrait jamais ni nulle

ni infinie; mais le théorème de M. Hermite nous apprend que dans chaque parallélogramme il y a au moins deux infinis et deux zéros.

En effet, si dans un parallélogramme il n'y avait qu'un infini, l'intégrale prise le long du parallélogramme serait égale au résidu relatif à cet infini multiplié par $2\pi\sqrt{-1}$. Or ce résidu ne saurait être nul; donc il ne saurait y avoir un seul infini dans le parallélogramme: il ne saurait non plus y avoir un seul zéro, car la fonction inverse n'aurait qu'un seul infini.

DEUXIÈME CONSÉQUENCE. — *Dans chaque parallélogramme, il y a autant de zéros que d'infinis.*

En effet, soit $f(z)$ une fonction à deux périodes, $\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \frac{f'(z)}{f(z)}$ aura les mêmes périodes; en l'intégrant le long d'un parallélogramme, on doit trouver zéro, ou la différence entre le nombre des zéros et des infinis de $f(z)$: cette différence est donc nulle.

TROISIÈME CONSÉQUENCE. — En intégrant

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \frac{zf'(z)}{f(z)}$$

le long du parallélogramme des périodes, et en appelant ω et ϖ les périodes, on trouve la différence entre la somme des zéros et celle des infinis contenus dans ce parallélogramme; elle est

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \left[-\omega \int \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \varpi \int \frac{f'(z)}{f(z)} dz \right].$$

La première intégrale est prise le long de la période ϖ , et la seconde le long de la période ω ; en effectuant, on a

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \left[-\omega \log \frac{f(z+\varpi)}{f(z)} + \varpi \log \frac{f(z+\omega)}{f(z)} \right].$$

ou

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}[\varpi \log 1 - \omega \log 1] = m\varpi + n\omega;$$

cette quantité est une période.

QUATRIÈME CONSÉQUENCE. — *Une fonction doublement périodique, qui admet n infinis, ou, ce qui revient au même, n zéros dans un parallélogramme de périodes, passe aussi n fois par la même valeur a à l'intérieur de ce parallélogramme.*

En effet, soit $f(x)$ une telle fonction, $f(x) - a$ aura aussi n infinis et, par suite, n zéros; donc $f(x)$ passe n fois par la valeur a .

Une fonction doublement périodique qui possède n infinis dans un parallélogramme élémentaire est dite d'ordre n .

La somme des valeurs de la variable x , pour lesquelles $f(x)$ prend la même valeur, est constante à des multiples des périodes près; en effet, d'après ce que l'on a vu (troisième conséquence), $f(z) - a$ est nul pour n valeurs de z qui, à un multiple des périodes près, ont une somme égale à celle des infinis de $f(x)$.

Il n'y a pas de fonctions du premier ordre, puisque toute fonction à deux périodes a au moins deux infinis dans chaque parallélogramme élémentaire, et les fonctions doublement périodiques les plus simples sont au moins du second ordre.

Nous allons maintenant essayer d'établir directement l'existence des fonctions monodromes, monogènes, continues et doublement périodiques.

REMARQUES RELATIVES AUX PRODUITS INFINIS.

Nous allons bientôt avoir à considérer des produits de la forme

$$\varphi(x) = \prod_{m=-\infty}^{m=+\infty} \prod_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left(1 + \frac{x}{a + m\omega + n\omega'} \right),$$

et il est bon de montrer dès à présent que la valeur du produit en question dépend de la manière dont on l'effectue, c'est-à-dire, en définitive, de l'ordre des facteurs.

Considérons, en effet, m et n comme les coordonnées d'un point, et faisons le produit de tous les facteurs correspondant à des valeurs de m et n intérieures à une courbe C_1 et de tous les facteurs correspondant à des valeurs de m et n intérieures à une courbe C_2 . Soient P_1 et P_2 les produits, on aura

$$\frac{P_1}{P_2} = \prod \left(1 + \frac{x}{a + m\omega + n\omega'} \right),$$

m et n désignant les valeurs entières comprises entre les deux contours C_1 et C_2 . On en tire

$$\begin{aligned} \log P_1 - \log P_2 &= \sum \log \left(1 + \frac{x}{a + m\omega + n\omega'} \right) \\ &= x \sum \frac{1}{a + m\omega + n\omega'} - \frac{x^2}{2} \sum \left(\frac{1}{a + m\omega + n\omega'} \right)^2 + \dots \end{aligned}$$

On voit que $\log P_1 - \log P_2$ peut être infini; mais il peut aussi être fini : c'est ce qui arrivera quand

$\sum \frac{1}{a + m\omega + n\omega'}$ sera fini. C'est ce qui arrivera encore lorsque, $\sum \frac{1}{a + m\omega + n\omega'}$ étant nul, parce que les deux

contours ont pour centre l'origine, $\sum \frac{1}{(a + m\omega + n\omega')^2}$ ne sera pas nul : ce cas remarquable a été examiné par M. Cayley. En désignant par A la valeur de cette somme, on aura, en négligeant des termes infiniment petits,

$$\log P_1 - \log P_2 = -\frac{Az^2}{2},$$

et, par suite,

$$\frac{P_1}{P_2} = e^{-\frac{Az^2}{2}}.$$

L'ordre dans lequel on effectue le produit, même en prenant autant de termes positifs que de termes négatifs dans chaque produit partiel, peut influencer sur le résultat en introduisant une exponentielle de la forme $e^{-\frac{Az^2}{2}}$; c'est ce qui nous permettra d'expliquer un paradoxe que nous rencontrerons plus loin.

SUR LES FONCTIONS AUXILIAIRES DE JACOBI.

Essayons maintenant de former directement une fonction monodrome et monogène admettant les périodes $4K$ et $2K'\sqrt{-1}$ de $\operatorname{sn} x$. Si l'on observe que l'on a

$$\sin x = x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \cdots,$$

ou

$$\sin x = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{-n}^{+n} \left(1 - \frac{x}{n\pi}\right) \quad \text{pour } n = \infty,$$

en supposant $1 - \frac{x}{0\pi}$ remplacé par x , on sera tenté de

poser

$$\operatorname{sn} x = \frac{\prod \left(1 - \frac{x}{2K m + 2K' n \sqrt{-1}} \right)}{\prod \left[1 - \frac{x}{2K m + (2n + 1)K' \sqrt{-1}} \right]},$$

en remplaçant $1 - \frac{x}{2K_0 + 2K'_0 \sqrt{-1}}$ par x , ou tout au moins y aura-t-il lieu de se demander si le second membre de cette formule ne serait pas doublement périodique. On voit d'ailleurs que ce second membre a été formé de manière à s'annuler et à devenir infini en même temps que $\operatorname{sn} x$. Malheureusement, d'après ce que l'on a vu au paragraphe précédent, les deux termes du quotient que nous considérons sont divergents, et ce quotient n'est pas bien déterminé; quoi qu'il en soit, en groupant convenablement les termes, on peut obtenir une fonction bien définie qu'il convient d'étudier.

Considérons, en particulier, le produit

$$\prod \left(1 - \frac{x}{2K m + 2K' n \sqrt{-1}} \right)$$

où

$$\left(1 - \frac{x}{2K_0 + 2K'_0 \sqrt{-1}} \right),$$

doit être remplacé par x .

En faisant d'abord varier m seul, il devient

$$\begin{aligned} & \prod \frac{2K m + 2K' n \sqrt{-1} - x}{2K m + 2K' n \sqrt{-1}} \\ &= \frac{2K' n \sqrt{-1} - x}{2K' n \sqrt{-1}} \prod \left(1 - \frac{2K' n \sqrt{-1} - x}{2K m} \right) \\ & \quad : \prod \left(1 - \frac{2K' n \sqrt{-1}}{2K m} \right), \end{aligned}$$

ou, en observant que $x \prod \left(1 - \frac{x}{m} \right)$ est égal à $\frac{1}{\pi} \sin \pi x$,

$$\frac{\sin \frac{2K'n\sqrt{-1}-x}{2K} \pi}{\sin \frac{2K'n\sqrt{-1}}{2K} \pi}.$$

Quand $n = 0$, il faut remplacer ce produit par $\sin \frac{\pi x}{K}$, et le produit cherché peut s'écrire

$$\sin \frac{\pi x}{K} \prod \frac{\left(q^{-n} e^{-\frac{\pi x \sqrt{-1}}{2K}} - q^n e^{\frac{\pi x \sqrt{-1}}{2K}} \right)}{(q^{-n} - q^n)},$$

en posant, pour abrégé, $q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}$. On peut encore écrire ce produit ainsi :

$$\sin \frac{\pi x}{K} \prod \frac{\left(e^{-\frac{\pi x \sqrt{-1}}{2K}} - q^{2n} e^{\frac{\pi x \sqrt{-1}}{2K}} \right)}{(1 - q^{2n})},$$

ou, en groupant les termes correspondant à des valeurs de n égales, mais de signes contraires,

$$(1) \quad \sin \frac{\pi x}{K} = \prod \frac{1 - 2q^{2n} \cos \frac{\pi x}{K} + q^{4n}}{(1 - q^{2n})^2}.$$

En traitant le second produit ou le dénominateur de $\sin x$ comme on a traité le premier, on le trouve successivement égal à

$$\prod \frac{\sin \frac{(2n+1)K'\sqrt{-1}-x}{2K} \pi}{\sin \frac{(2n+1)K'\sqrt{-1}}{2K} \pi}$$

ou

$$\prod \frac{1 - 2q^{2n+1} \cos \frac{\pi x}{K} + q^{2(2n+1)}}{(1 - q^{2n+1})^2}.$$

Les deux résultats auxquels nous venons de parvenir sont d'ailleurs convergents si, ce que l'on peut toujours supposer, le module de q est moindre que l'unité, c'est-à-dire si la partie réelle de $\frac{K'}{K}$ est positive.

La méthode même que nous avons suivie pour former le numérateur et le dénominateur de $sn x$ montre que ces termes ont des valeurs qui dépendent de l'ordre de leurs facteurs; et, en effet, si nous considérons, par exemple, le dénominateur qui, à un facteur constant près, est

$$\varphi(x) = \prod \left[1 - 2q^{2n+1} \cos \frac{\pi x}{K} + q^{2(2n+1)} \right],$$

il a manifestement la période $4K$ que possédait $sn x$, mais il n'a pas la période $2iK'$ qu'il aurait eue en laissant d'abord m constant pour faire varier n ; et il n'a certainement pas la période $2iK'$, sans quoi il serait doublement périodique sans devenir infini. Quoiqu'il en soit, il est curieux de rechercher ce que devient la fonction $\varphi(x)$ quand on change x en $x + 2K'\sqrt{-1}$; on a

$$\begin{aligned} & \varphi(x + 2K'\sqrt{-1}) \\ &= \prod \left[1 - 2q^{2n+1} \cos \pi \frac{x + 2K'\sqrt{-1}}{K} + q^{2(2n+1)} \right] \\ &= \prod \left(1 - q^{2n+1} e^{-\pi \frac{x + 2K'\sqrt{-1}}{K} \sqrt{-1}} \right) \left(1 - q^{2n+1} e^{\pi \frac{x + 2K'\sqrt{-1}}{K} \sqrt{-1}} \right), \\ &= \prod \left(1 - q^{n+3} e^{-\frac{\pi x}{K} \sqrt{-1}} \right) \left(1 - q^{2n-1} e^{+\frac{\pi x}{K} \sqrt{-1}} \right), \end{aligned}$$

ou, si l'on veut,

$$\varphi(x + 2K'\sqrt{-1}) = \left(1 - q^{-1} e^{\frac{\pi x \sqrt{-1}}{K}} \right) \varphi(x) : \left(1 - q e^{-\frac{\pi x \sqrt{-1}}{K}} \right),$$

c'est-à-dire

$$(A) \quad \varphi(x + 2K' \sqrt{-1}) = -\varphi(x) e^{-\frac{\pi \sqrt{-1}}{K} (x + K' \sqrt{-1})}.$$

Le numérateur de la valeur de $\operatorname{sn} x$, que nous représenterons par $\theta(x)$, satisfait, comme on peut le vérifier, à la même équation; dès lors il est facile de voir que la fonction définie par le rapport $\frac{\theta(x)}{\varphi(x)}$ admet non-seulement la période $4K$ commune à θ et à φ , mais aussi la période $2K' \sqrt{-1}$. En effet, de la formule (A) et de

$$\theta(x + 2K' \sqrt{-1}) = -\theta(x) e^{-\frac{\pi \sqrt{-1}}{K} (x + K' \sqrt{-1})},$$

on déduit

$$\frac{\theta(x + 2K' \sqrt{-1})}{\varphi(x + 2K' \sqrt{-1})} = \frac{\theta(x)}{\varphi(x)}.$$

Il resterait à prouver en toute rigueur que $\operatorname{sn} x = \frac{\theta(x)}{\varphi(x)}$; c'est ce qui serait évident, si l'on pouvait admettre que $\frac{\theta(x)}{\varphi(x)}$ représente une fonction continue, monotone et monogène. En effet, $\operatorname{sn} x$ et $\frac{\theta(x)}{\varphi(x)}$ ayant les mêmes zéros et les mêmes infinis seraient égaux à un facteur constant près, qu'il serait facile après cela de calculer. Nous ne tarderons pas à prouver que l'on a bien à un facteur constant près $\operatorname{sn} x = \frac{\theta(x)}{\varphi(x)}$; jusqu'alors nous considérerons ce fait comme très-probable.

Les fonctions telles que θ et φ sont ce que nous appellerons des fonctions elliptiques auxiliaires.

(A suivre.)