

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 16
(1877), p. 429-432

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__429_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1877, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SOLUTIONS DE QUESTIONS
PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.**

Question 1180

(voir 2^e série, t. XIV, p. 336);

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

Une pile de boulets à base carrée ne contient un nombre de boulets égal au carré d'un nombre entier que lorsqu'elle en contient vingt-quatre sur le côté de la base.

(ÉDOUARD LUCAS.)

On sait, en effet, que la somme des carrés des x premiers nombres entiers a pour expression

$$\frac{x(x+1)(2x+1)}{6};$$

on doit donc poser

$$x(x+1)(2x+1) = 6y^2;$$

mais les facteurs x , $x+1$ et $2x+1$ sont premiers entre eux, et l'équation précédente donne les neuf décompositions suivantes :

I.	$x = 6u^2,$	$x+1 = v^2,$	$2x+1 = w^2;$
II.	$x = 3u^2,$	$x+1 = 2v^2,$	$2x+1 = w^2;$
III. . .	$x = 3u^2,$	$x+1 = v^2,$	$2x+1 = 2w^2;$
IV.	$x = 2u^2,$	$x+1 = 3v^2,$	$2x+1 = w^2;$
V.	$x = 2u^2,$	$x+1 = v^2,$	$2x+1 = 3w^2;$
VI.	$x = u^2,$	$x+1 = 6v^2,$	$2x+1 = w^2;$
VII. . .	$x = u^2,$	$x+1 = 3v^2,$	$2x+1 = 2w^2;$
VIII. . .	$x = u^2,$	$x+1 = 2v^2,$	$2x+1 = 3w^2;$
IX.	$x = u^2,$	$x+1 = v^2,$	$2x+1 = 6w^2.$

Nous allons examiner successivement ces neuf hypothèses.

I. On a

$$(1) \quad w^2 - 1 = 12u^2,$$

et, par suite, puisque les facteurs $w+1$ et $w-1$ ont leur plus grand commun diviseur égal à 2, on en déduit, en admettant les valeurs négatives de w ,

$$(2) \quad w - 1 = 2x^2;$$

mais, d'autre part,

$$(3) \quad w^2 + 1 = 2v^2.$$

Les équations (2) et (3) doivent être vérifiées en même temps. Le système de ces deux équations a été traité complètement par M. Gerono (*); il n'admet pour solu-

(*) Voir même tome, p. 231.

tions entières que les valeurs $w = \pm 1$ et $w = \pm 7$. Ces valeurs vérifient d'ailleurs l'équation (1); on en déduit $x = 0$ et $x = 24$. Ainsi

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 24^2 = \frac{24 \cdot 25 \cdot 49}{6} = 4900.$$

II. Cette hypothèse conduit à l'équation

$$2v^2 - 3u^2 = 1,$$

impossible suivant le module 3.

III. On déduit de cette décomposition l'équation

$$2w^2 - 6u^2 = 1,$$

impossible suivant le module 2.

IV. On obtient aisément

$$w^2 + 1 = 6v^2,$$

équation impossible suivant le module 3.

V. Cette hypothèse donne l'équation

$$4u^2 + 1 = 3w^2,$$

impossible suivant le module 3 ou le module 4.

VI. On trouve l'équation, impossible suivant le module 3,

$$6v^2 = u^2 + 1.$$

VII. On trouve de même l'impossibilité

$$3v^2 = u^2 + 1.$$

VIII. Cette hypothèse ne donne que la solution $x = 1$, d'après la remarque qui termine l'article précédent.

IX. On est conduit à l'impossibilité

$$2u^2 + 1 = 6w^2.$$

(432)

Ainsi, en résumé, la somme des carrés des x premiers nombres entiers n'est jamais égale à un carré parfait, excepté pour $x = 24$.