

E. AMIGUES

Mémoire sur les transformations du second ordre dans les figures planes

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 16 (1877), p. 422-424

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__422_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1877, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MÉMOIRE SUR LES TRANSFORMATIONS DU SECOND ORDRE DANS LES FIGURES PLANES;

PAR M. E. AMIGUES,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Nice.

PREMIÈRE PARTIE.

1. Les transformations du second ordre, bien qu'elles soient connues depuis un demi-siècle (*), n'ont pas donné dans la Géométrie supérieure les résultats qu'il était permis d'espérer. Peut-être n'a-t-on pas étudié avec assez de soin les ressources de cette méthode. Les recherches que nous avons faites à ce sujet nous ont conduit à un certain nombre de lois, qui pourront avoir quelque intérêt pour les géomètres.

2. Soient $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$ les coordonnées cartésiennes d'un point dans un plan, $\frac{x'}{z'}$ et $\frac{y'}{z'}$ les coordonnées cartésiennes d'un point dans le même plan ou dans un plan différent. Deux relations entre ces quantités $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{x'}{z'}$ et $\frac{y'}{z'}$ définissent un mode de transformation des figures. Supposons ces relations algébriques et telles qu'à tout point de chaque figure corresponde dans l'autre un point et un seul. Cette dernière condition revient à supposer que les relations sont du premier degré et homogènes, soit en x, y, z , soit en x', y', z' . Elles sont donc de la forme sui-

(*) MAGNUS, *Nouvelle méthode pour découvrir des théorèmes en Géométrie* (*Journal de Crelle*; 1831).

vante :

$$Lx + My + Nz = 0,$$

$$L'x + M'y + N'z = 0,$$

L, M, N, L', M', N' étant des fonctions linéaires et homogènes de x', y', z' .

On peut alors les écrire ainsi :

$$\frac{x}{MN' - NM'} = \frac{y}{NL' - LN'} = \frac{z}{LM' - ML'}.$$

Il peut arriver que les dénominateurs se réduisent au premier degré. On a alors une transformation homographique.

Mais, en général, ces dénominateurs sont des fonctions du second degré U, V, W , et les relations prennent la forme suivante :

$$\frac{x}{U} = \frac{y}{V} = \frac{z}{W}.$$

Les fonctions U, V, W ne sont pas arbitraires; car, s'il en était ainsi à tout point donné (x, y, z) correspondraient en général quatre points (x', y', z') communs aux trois coniques représentées par les équations

$$\frac{x}{U} = \frac{y}{V} = \frac{z}{W}.$$

Pour qu'à un point (x, y, z) corresponde un seul point (x', y', z') , il est indispensable que les trois coniques ci-dessus aient trois points communs qui restent invariables quand le point (x, y, z) change, de telle sorte que leur quatrième point commun corresponde seul au point (x, y, z) . Prenons ces trois points communs pour sommets d'un triangle de référence dans le plan P' qui contient le point (x', y', z') , et pour faciliter les interprétations géométriques, adoptons des paramètres de référence égaux à l'unité. Toutes les coniques ci-dessus doivent être circonscrites au triangle de référence, en particulier les trois

coniques représentées par les équations

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0.$$

Il faut donc que l'on ait

$$\begin{aligned} U &= a Y' Z' + b X' Z' + c X' Y', \\ V &= a_1 Y' Z' + b_1 X' Z' + c_1 X' Y', \\ W &= a_2 Y' Z' + b_2 X' Z' + c_2 X' Y'. \end{aligned}$$

Ainsi les facteurs U, V, W ont une forme particulière, et les relations qui définissent la transformation deviennent

$$\begin{aligned} \frac{x}{a Y' Z' + b X' Z' + c X' Y'} &= \frac{y}{a_1 Y' Z' + b_1 X' Z' + c_1 X' Y'} \\ &= \frac{z}{a_2 Y' Z' + b_2 X' Z' + c_2 X' Y'}. \end{aligned}$$

Multipliant les deux termes du premier rapport par l , ceux du second par m , ceux du troisième par n , puis divisant la somme des numérateurs par celle des dénominateurs, on obtient un rapport égal à chacun des proposés. Si d'ailleurs on choisit l, m, n d'après les conditions

$$\begin{aligned} la + ma_1 + na_2 &= 0, \\ lb + mb_1 + nb_2 &= 0, \end{aligned}$$

ce rapport se réduit à

$$\frac{lx + my + nz}{(lc + mc_1 + nc_2) X' Y'}.$$

On trouve de même deux rapports analogues égaux, de sorte que les formules de transformation peuvent s'écrire ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{lx + my + nz}{(lc + mc_1 + nc_2) X' Y'} &= \frac{l_1 x + m_1 y + n_1 z}{(l_1 a + m_1 a_1 + n_1 a_2) Y' Z'} \\ &= \frac{l_2 x + m_2 y + n_2 z}{(l_2 b + m_2 b_1 + n_2 b_2) Z' X'}. \end{aligned}$$

(A suivre.)
