

## Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

*Nouvelles annales de mathématiques 2<sup>e</sup> série*, tome 16  
(1877), p. 33-48

<[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1877\\_2\\_16\\_\\_33\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__33_1)>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1877, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

**SOLUTIONS DE QUESTIONS  
PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.**

---

*Question 1159*

(voir 2<sup>e</sup> série, t. XIV, p. 96),

PAR M. G. BEAUVAIS.

*Lorsqu'un angle constant  $2\varphi$  se déplace en restant tangent à une courbe plane convexe et fermée, d'un périmètre  $S$ , la bissectrice extérieure de cet angle enveloppe une courbe fermée dont le périmètre est  $\frac{S}{\sin \varphi}$ .*

*En faisant varier l'angle  $2\varphi$  et réduisant par ho-*  
*Ann. de Mathém., 2<sup>e</sup> série, t. XVI. (Janvier 1877.)*

*mothétique chacune des courbes obtenues dans un rapport égal à  $\sin \varphi$ , on forme une série de courbes fermées isopérimètres. Quelle est celle de ces courbes qui comprend la plus grande aire?* (G. FOURET.)

1° Une tangente à la courbe donnée a pour équation

$$y = (x - p) \tan \theta,$$

$\theta$  étant l'angle de cette tangente avec OX et  $p$  une fonction connue de  $\theta$ .

La tangente M'N', faisant avec la première un angle égal à  $2\varphi$ , a pour équation

$$y = (x - p_1) \tan (\theta + 2\alpha),$$

$2\alpha$  étant le supplément de  $2\varphi$  et  $p_1$  la fonction  $p$  dans laquelle  $\theta$  a été remplacé par  $(\theta + 2\alpha)$ ; la bissectrice MH a pour équation

$$\frac{y - (x - p) \tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} - \frac{y - (x - p_1) \tan (\theta + 2\alpha)}{\sqrt{1 + \tan^2 (\theta + 2\alpha)}} = 0,$$

ou

$$y [\cos \theta + \cos (\theta + 2\alpha)] - x [\sin \theta + \sin (\theta + 2\alpha)] + p \sin \theta + p_1 \sin (\theta + 2\alpha) = 0.$$

Cela posé, la longueur  $\Sigma$  de la courbe enveloppée par cette bissectrice est donnée par la formule

$$\Sigma = \int_0^{2\pi} OH d(\alpha + \theta) \quad (*),$$

$$\begin{aligned} OH &= \frac{p \sin \theta + p_1 \sin (\theta + 2\alpha)}{\sqrt{[\cos \theta + \cos (\theta + 2\alpha)]^2 + [\sin \theta + \sin (\theta + 2\alpha)]^2}} \\ &= \frac{p \sin \theta + p_1 \sin (\theta + 2\alpha)}{2 \cos \alpha}; \end{aligned}$$

---

(\*) *Calcul intégral* de M. Bertrand, t. II, p. 372.

donc

$$\begin{aligned}\Sigma &= \frac{1}{2 \cos \alpha} \int_0^{2\pi} [p \sin \theta + p_1 \sin (\theta + 2\alpha)] d(\theta + \alpha), \\ \Sigma' &= \frac{1}{2 \cos \alpha} \int_0^{2\pi} p \sin \theta d\theta \\ &\quad + \frac{1}{2 \cos \alpha} \int_0^{2\pi} p_1 \sin (\theta + 2\alpha) d(\theta + 2\alpha),\end{aligned}$$

puisque

$$d\theta = d(\alpha + \theta) = d(\theta + 2\alpha);$$

mais la longueur S de la courbe donnée est

$$\begin{aligned}S &= \int_0^{2\pi} \frac{p \tan \theta d\theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \int_0^{2\pi} p \sin \theta d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} p_1 \sin (\theta + 2\alpha) d(\theta + 2\alpha);\end{aligned}$$

donc

$$\Sigma = \frac{1}{2 \cos \alpha} S + \frac{1}{2 \cos \alpha} S = \frac{S}{\cos \alpha}.$$

2° Cherchons d'abord la surface d'une courbe fermée enveloppe de la droite

$$(1) \quad y = (x - q) \tan \psi,$$

$\psi$  étant l'angle de la droite avec OX et  $q$  une fonction connue de  $\psi$ .

Différentions l'équation (1),

$$0 = \frac{x - q}{\cos^2 \psi} - \tan \psi \frac{dq}{d\psi};$$

de ces équations nous tirons

$$\begin{aligned}x - p &= \frac{dq}{d\psi} \sin \psi \cos \psi, \quad y = \frac{dq}{d\psi} \sin^2 \psi, \\ \frac{dx}{d\psi} &= 2 \cos^2 \psi \frac{dq}{d\psi} + \frac{d^2 q}{d\psi^2} \sin \psi \cos \psi.\end{aligned}$$

Cela posé, A étant l'aire de la courbe,

$$2A = \int y dx = \int_0^{2\pi} \sin^2 \psi \frac{dq}{d\psi} \left( 2 \frac{dq}{d\psi} \cos^2 \psi + \frac{d^2 q}{d\psi^2} \sin \psi \cos \psi \right) d\psi,$$

$$4A = \int_0^{2\pi} 4 \left( \frac{dq}{d\psi} \right)^2 \sin^2 \psi \cos^2 \psi d\psi + \int_0^{2\pi} 2 \frac{dq}{d\psi} \frac{d^2 q}{d\psi^2} \sin^3 \psi \cos \psi d\psi.$$

Intégrons par parties la seconde intégrale, il vient

$$\left[ \left( \frac{dq}{d\psi} \right)^2 \sin^3 \psi \cos \psi \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \left( \frac{dq}{d\psi} \right)^2 (3 \sin^2 \psi \cos^2 \psi - \sin^4 \psi) d\psi.$$

La première partie est nulle; il vient donc

$$4A = \int_0^{2\pi} \left( \frac{dq}{d\psi} \right)^2 \sin^2 \psi (4 \cos^2 \psi - 3 \cos^2 \psi + \sin^2 \psi) d\psi,$$

$$4A = \int_0^{2\pi} \left( \frac{dq}{d\psi} \right)^2 \sin^2 \psi d\psi.$$

Cette formule va nous permettre de résoudre la seconde partie du problème.

En effet, l'équation de la tangente MH peut s'écrire

$$y = \left[ x - \frac{\rho \sin \theta + p_1 \sin(\theta + 2\alpha)}{2 \sin(\theta + \alpha) \cos \alpha} \right] \tan(\theta + \alpha);$$

l'équation de la tangente à la courbe enveloppe, réduite dans le rapport  $\cos \alpha$ , s'obtient en multipliant le terme indépendant de la précédente par  $\cos \alpha$ ,

$$(3) \quad y = \left[ x - \frac{\rho \sin \theta + p_1 \sin(\theta + 2\alpha)}{2 \sin(\theta + \alpha)} \right] \tan(\theta + \alpha);$$

$\rho \sin \theta$  est une fonction connue de  $\theta$ ,  $F(\theta)$ ; en posant  $\theta + \alpha = \psi$ , il vient

$$\rho \sin \theta = F(\psi - \alpha), \quad p_1 \sin(\theta + 2\alpha) = F(\psi + \alpha),$$

et l'équation (3) s'écrit

$$\gamma = \left[ x - \frac{F(\psi - \alpha) + F(\psi + \alpha)}{2 \sin \psi} \right] \tan \psi.$$

Nous aurons l'aire de la courbe réduite en faisant, dans l'expression de  $4A$ ,

$$q = \frac{F'(\psi - \alpha) + F'(\psi + \alpha)}{2 \sin \psi}.$$

La valeur de  $\alpha$ , qui rend  $4A$  maximum, annule  $\frac{dA}{d\alpha}$  :

$$4 \frac{dA}{d\alpha} = \int_0^{2\pi} 2 \frac{dq}{d\psi} \frac{d^2 q}{d\psi d\alpha} \sin^2 \psi d\psi;$$

mais

$$\frac{dq}{d\alpha} = \frac{-F'(\psi - \alpha) + F'(\psi + \alpha)}{2 \sin \psi},$$

qui est nul pour  $\alpha = 0$ .

Donc la courbe de surface maximum est la courbe proposée elle-même pour laquelle  $2\varphi = \pi$ ; cette courbe est égale à sa réduite.

*Note.* — Solution analogue par M. Chabanel.

### Questions 1163 et 1164

(voir 2<sup>e</sup> série, t. XIV, p. 143 et 144);

PAR M. PELLISSIER.

1163. *On nomme transformations biquadratiques toutes celles dans lesquelles à un point de chacune des deux figures conjuguées correspond un point, et à une droite, une conique. Montrer que les deux angles des asymptotes de cette conique sont toujours mesurés par la moitié des deux arcs suivant lesquels la droite divise le cercle fixe des trois points fondamentaux de la trans-*

*formation. On obtient une ellipse, une hyperbole ou une parabole suivant que la droite est extérieure à ce cercle, qu'elle le coupe ou qu'elle lui est tangente.*

(HATON DE LA GOUPILLIÈRE.)

Soient  $P(x, y, z)$  et  $P'(x', y', z')$  deux points correspondants. La transformation sera biquadratique si l'on pose

$$x' : y' : z' = U : V : W,$$

où  $U, V, W$  sont des fonctions du deuxième degré en  $x, y, z$ , qui représentent des coniques ayant trois points communs.

En effet, à une droite correspond alors une conique, et à un point correspond un point et un seul.

D'ailleurs, si, au lieu des coniques  $U, V, W$ , nous choisissons trois coniques de la forme  $lU + mV + nW$ , en prenant pour nouvelles lignes de référence les droites correspondantes  $lx + my + nz$ , cela reviendrait simplement à un changement de coordonnées. Nous conserverons donc la même généralité en prenant pour  $U, V, W$  les trois couples de droites obtenues en joignant chacun des points fixes aux deux autres.

Ainsi, en prenant pour triangle de référence le triangle des trois points fixes (points fondamentaux), la transformation sera exprimée par les relations réciproques

$$\begin{aligned} x : y : z &= y' z' : z' x' : x' y', \\ x' : y' : z' &= y z : z x : x y; \end{aligned}$$

et si l'on joint aux sommets du triangle fondamental les points conjugués  $P$  et  $P'$ , dont les coordonnées satisfont à ces relations, les droites ainsi obtenues feront deux à deux des angles égaux avec les côtés de ce triangle. (voir SALMON, *Higher plane Curves*, 2<sup>e</sup> édition, articles 283

et 344). C'est cette propriété qui va nous donner la solution des questions nos 1163 et 1164.

Soient  $ABC$  (\*) le cercle fixe des trois points fondamentaux de la transformation, et  $MN$  une droite qui coupe ce cercle en  $M$  et  $N$ . La figure conjuguée de cette droite est une conique qu'il est facile de construire par points.

Considérons spécialement le point  $M$  et cherchons le point de la conique qui lui correspond. Pour cela, joignons  $MB$  et faisons en  $B$  l'angle  $\widehat{CBD}$  égal à  $\widehat{MBA}$ , puis joignons  $MC$  et faisons  $\widehat{EBC} = \widehat{MCA}$ ; le point cherché doit être à l'intersection des droites  $BD$  et  $CE$ . Or ces deux lignes sont parallèles, puisque  $\widehat{MBA} = \widehat{MCA}$ ; donc le point correspondant de  $M$  est le point de la conique situé à l'infini dans la direction  $BD$ . On verrait de même que le point correspondant de  $N$  est le point de la conique à l'infini dans la direction  $BD'$ , telle que la droite  $BD'$  fasse avec  $BC$  le même angle que  $BN$  fait avec  $BA$ . L'angle  $DBD'$  n'est donc autre que l'angle des asymptotes de la conique, et il est visiblement égal à  $MBN$ , puisque l'on a

$$\widehat{CBD} = \widehat{MBA} \quad \text{et} \quad \widehat{CBD'} = \widehat{NBA}.$$

Cet angle a pour mesure la moitié de l'arc  $MAN$ , et l'angle supplémentaire la moitié de l'arc  $MBCN$ .

Lorsque la droite est extérieure au cercle, la conique conjuguée a tous ses points à distance finie, c'est une ellipse. Si la droite coupe le cercle en deux points, nous venons de voir que la conique est une hyperbole, puisqu'elle s'en va à l'infini dans deux directions différentes; enfin, si la droite est tangente, elle a évidemment pour conjuguée une parabole.

(\*) Le lecteur est prié de faire les figures.



1164. *Montrer que, dans tout procédé biquadratique, la condition nécessaire et suffisante pour obtenir un cercle est de transformer un cercle mené par deux des points fondamentaux. Le conjugué y passe alors lui-même. Les deux séries de centres de ces cercles forment un système en involution sur la perpendiculaire élevée au milieu de la droite qui joint ces deux points. Son centre est celui du cercle des trois points fondamentaux, et ses foyers les points où ce cercle rencontre la droite.*

*Lorsque l'on prend pour points fondamentaux les ombilics du plan, il suffit d'après cela de partir d'un cercle quelconque pour en obtenir un autre, et, en effet, ce mode spécial de transformation biquadratique n'est autre que le procédé des rayons vecteurs réciproques.*

(HATON DE LA GOUFFILLIÈRE.)

Soit P un point pris sur un cercle qui passe aux deux points fondamentaux A et B. Pour avoir son correspondant, il suffit de joindre PA et de faire l'angle  $\widehat{BAP'} = \widehat{CAP}$ , puis de joindre PB et de faire l'angle  $\widehat{ABP'} = \widehat{CBP}$ ; les deux droites AP', BP' se coupent au point cherché P'. Or on a immédiatement

$$(1) \quad \begin{cases} \widehat{AP'B} = 180 - (\widehat{P'AB} + \widehat{P'BA}), \\ \widehat{AP'B} = 180 - (\widehat{PAC} + \widehat{PBC}), \\ \widehat{AP'B} = 180 - (\widehat{APB} - \widehat{ACB}). \end{cases}$$

L'angle AP'B étant constant, le lieu de P' est un cercle qui passe aux points A et B.

Réciproquement, pour que ce lieu de P' soit un cercle, il faut que l'angle AP'B soit constant, et alors, à cause de la relation (1), l'angle  $\widehat{APB}$  est aussi constant, c'est-à-

dire que le point P est sur un cercle qui passe par A et B. La condition est donc nécessaire et suffisante.

Il y a cependant une exception pour le cercle des trois points fondamentaux. Ce cercle correspond à la droite de l'infini; car, si l'on cherche le conjugué d'un point quelconque  $p$  de ce cercle, on trouve qu'il est déterminé par l'intersection de deux droites parallèles et par conséquent situé à l'infini.

Considérons maintenant le cercle des points P et le cercle conjugué qui est le cercle des points P': soient O, O' leurs centres et  $\omega$  le centre du cercle circonscrit au triangle fondamental ABC; ces trois points sont situés sur la perpendiculaire au milieu de AB, laquelle rencontre le cercle  $\omega$  aux points  $f$  et  $f'$ . Joignons  $\omega A$ ,  $OA$ ,  $O'A$ : les deux triangles  $\omega OA$ ,  $\omega O'A$  ont l'angle en  $\omega$  commun; de plus, les angles  $\omega OA$ ,  $\omega AO'$  sont égaux. En effet, l'angle  $\omega OA$  est égal à  $180 - APB$ , puisque, dans le cercle O, il a pour mesure la moitié de l'arc APB, et l'angle  $\omega AO'$  est celui sous lequel se coupent les cercles  $\omega$ ,  $O'$  (segments capables des angles ACB et  $AP'B$  décrits sur AB), c'est-à-dire qu'il est égal à

$$180 - (\widehat{APB} - \widehat{ACB}) - \widehat{ACB} \quad \text{ou à} \quad 180 - \widehat{APB}.$$

Les triangles  $\omega OA$  et  $\omega O'A$  sont donc semblables et donnent

$$\frac{O\omega}{\omega A} = \frac{\omega A}{O'\omega},$$

ou bien

$$O\omega \cdot O'\omega = \overline{\omega A}^2,$$

ou encore, puisque  $\omega f = \omega f' = \overline{\omega A}$ ,

$$O\omega \cdot O'\omega = \overline{\omega f}^2 = \overline{\omega f'}^2.$$

Par conséquent, les points O, O' font partie d'une involution dont  $\omega$  est le point central et  $f, f'$  les foyers.

La dernière partie de l'énoncé est évidente, si l'on se rappelle que tous les cercles du plan passent par les ombilics (points circulaires à l'infini).

### Question 1184

(voir 2<sup>e</sup> série, t. XIV, p. 437):

PAR M. PRAVAZ,

Professeur au Collège de Tulle.

Soit

$$(1) \quad \begin{cases} X = ax + by + cz + dt, \\ Y = a_1x + b_1y + c_1z + d_1t; \end{cases}$$

si  $a, b, c, d, a_1, b_1, c_1, d_1$  sont des fonctions données d'un paramètre arbitraire, la droite mobile

$$X = 0, \quad Y = 0$$

engendrera une surface réglée; l'équation de la surface du second ordre passant par trois droites infiniment voisines de la surface engendrée sera

$$(2) \quad \begin{vmatrix} a & b & c & d & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & 0 & 0 \\ a' & b' & c' & d' & X & 0 \\ a'_1 & b'_1 & c'_1 & d'_1 & Y & 0 \\ a'' & b'' & c'' & d'' & 2X' & X \\ a''_1 & b''_1 & c''_1 & d''_1 & 2Y' & Y \end{vmatrix} = 0.$$

$a', b', \dots, a'_1, b'_1, \dots, a'', b'', \dots, a''_1, b''_1, \dots$  sont les dérivées premières et secondes des fonctions  $a, b, \dots, a_1, b_1, \dots$ , par rapport au paramètre dont elles dépendent;  $X, Y$  sont définis par les égalités (1), et l'on a posé

$$(3) \quad \begin{cases} X' = a'x + b'y + c'z + d't, \\ Y' = a'_1x + b'_1y + c'_1z + d'_1t. \end{cases}$$

(L. PAINVIN.)

Soient

$$\begin{aligned} X &= 0, \\ Y &= 0; \\ X + \Delta X &= 0, \\ Y + \Delta Y &= 0; \\ X + 2\Delta X + \Delta^2 X &= 0, \\ Y + 2\Delta Y + \Delta^2 Y &= 0 \end{aligned}$$

les équations de trois positions infiniment voisines A, A', A'' de la droite mobile; soit D une droite rencontrant A, A', A'' en des points dont nous désignerons respectivement les coordonnées par  $x, y, z, t; x + \Delta x, \dots, x + 2\Delta x + \Delta^2 x, \dots$ ; soient enfin  $\xi, \eta, \zeta, \tau$  les coordonnées courantes de D. On a

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\xi - x}{\Delta x} &= \frac{\eta - y}{\Delta y} = \frac{\zeta - z}{\Delta z} = \frac{\tau - t}{\Delta t}, \\ \frac{\xi - x}{\Delta^2 x} &= \frac{\eta - y}{\Delta^2 y} = \frac{\zeta - z}{\Delta^2 z} = \frac{\tau - t}{\Delta^2 t}. \end{aligned} \right.$$

L'équation de la surface cherchée s'obtiendra par l'élimination, entre les équations (4) et (5), des coordonnées  $x, y, z, t$  et de leurs accroissements du premier et du second ordre.

Les équations (4), dont on réduit chaque couple au moyen des couples précédents et où l'on substitue ensuite les dérivées aux accroissements, deviennent

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} X &= 0, \\ Y &= 0; \\ X' + X_{x'} &= 0 \\ Y' + Y_{y'} &= 0; \\ X'' + 2X'_{x'} + X_{x''} &= 0, \\ Y'' + 2Y'_{y'} + Y_{y''} &= 0; \end{aligned} \right.$$

en posant, pour abréger,

$$\begin{aligned} X_x &= ax' + by' + cz' + dt' + \dots, \\ X'_{x'} &= a'x' + b'y' + c'z' + d't' + \dots \end{aligned}$$

Les équations (5) deviennent de même

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{\xi - x}{x'} = \frac{\eta - y}{y'} = \frac{\zeta - z}{z'} = \frac{\tau - t}{t'} = K, \\ \frac{\xi - x}{x''} = \frac{\eta - y}{y''} = \frac{\zeta - z}{z''} = \frac{\tau - t}{t''} = K', \end{cases}$$

K et K' étant deux inconnues auxiliaires. On tire des équations (7)

$$\begin{aligned} \xi &= x + Kx', \dots, \\ \xi &= x + K'x'', \dots; \end{aligned}$$

on déduit de là, en ayant égard aux équations (6),

$$\begin{aligned} X_{\xi} &= K X_{x'}, \dots, \\ X_{\xi} &= K' X_{x''}, \dots, \\ X'_{\xi} &= -X_{x'} + K X_{x'}, \dots; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} X_{x'} &= \frac{1}{K} X_{\xi}, \dots, \\ X_{x''} &= \frac{1}{K'} X_{\xi}, \dots, \\ X'_{x'} &= \frac{1}{K} X'_{\xi} + \frac{1}{K'} X_{\xi}, \dots. \end{aligned}$$

D'après cela, les équations (6) deviennent

$$\begin{aligned} ax + by + cz + dt &= 0, \\ a_1x + b_1y + c_1z + d_1t &= 0, \\ a'x + b'y + c'z + d't + \frac{1}{K} X_{\xi} &= 0, \\ a'_1x + b'_1y + c'_1z + d'_1t + \frac{1}{K} Y_{\xi} &= 0, \\ a''x + b''y + c''z + d''t + \frac{2}{K} X'_{\xi} + \left( \frac{2}{K^2} + \frac{1}{K'} \right) X_{\xi} &= 0, \\ a''_1x + b''_1y + c''_1z + d''t + \frac{2}{K} Y'_{\xi} + \left( \frac{2}{K^2} + \frac{1}{K'} \right) Y_{\xi} &= 0, \end{aligned}$$

et l'élimination, entre ces équations, de  $x, y, z, t$  et des inconnues auxiliaires  $K$  et  $K'$  conduit à l'équation

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & 0 & 0 \\ a' & b' & c' & d' & X_\xi & 0 \\ a'_1 & b'_1 & c'_1 & d'_1 & Y_\xi & 0 \\ a'' & b'' & c'' & d'' & 2X'_\xi & X_\xi \\ a''_1 & b''_1 & c''_1 & d''_1 & 2Y'_\xi & Y_\xi \end{vmatrix} = 0,$$

qui ne diffère de l'équation (2) que par la substitution des coordonnées  $\xi, \eta, \zeta, \tau$  aux coordonnées  $x, y, z, t$ .

*Note.* — Autre solution par M. Genty.

### Question 1217

(voir 2<sup>e</sup> série, t. XV, p. 336),

PAR M. R.-W. GENESE,

M. A. du collège de Saint-Jean, Cambridge, Angleterre.

Si

$$a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + 2f\beta\gamma + 2g\gamma\alpha + 2h\alpha\beta = 0$$

est l'équation d'une conique, et  $A, B, C$  les angles que l'un des axes de la courbe fait avec les côtés du triangle de référence, on a

$$a \sin 2A + b \sin 2B + c \sin 2C \\ + 2f \sin (B + C) + 2g \sin (C + A) + 2h \sin (A + B) = 0.$$

(A. CAMBIER.)

Il faudra trouver l'équation des bissectrices des angles de deux droites données. Je donnerai ici pour y arriver une méthode qui présente plusieurs avantages.

Soient  $X'OX$ ,  $Y'OY$  deux droites coupées par un cercle de centre  $O$ . Les cordes d'intersection sont parallèles aux bissectrices de l'angle  $XOY$ . De plus, si le rayon du cercle est nul, les cordes *coïncideront* avec les bissectrices.

Soit

$$ax^2 + by^2 + 2hxy = 0$$

l'équation des droites; le cercle sera représenté par

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos \omega = 0.$$

Alors,  $\lambda$  étant choisi de manière que le premier membre soit un carré,

$$ax^2 + by^2 + 2hxy + \lambda (x^2 + y^2 + 2xy \cos \omega) = 0$$

représentera les bissectrices.  $\lambda$  est déterminé par la relation

$$(a + \lambda)(b + \lambda) = (h + \lambda \cos \omega)^2.$$

En multipliant l'équation par  $a + \lambda$  et prenant la racine carrée, on a

$$(a + \lambda)x + (h + \lambda \cos \omega)y = 0$$

pour l'équation d'une des bissectrices; et, de la même manière,

$$(b + \lambda)y + (h + \lambda \cos \omega)x = 0,$$

pour l'équation de l'autre.

En éliminant  $\lambda$ , l'équation des bissectrices est

$$\frac{ax + hy}{by + hx} = \frac{x + y \cos \omega}{y + x \cos \omega}.$$

Maintenant, soit  $LMN$  le triangle de référence. Les coordonnées des points de la courbe à l'infini sont liées par l'équation

$$\alpha \sin L + \beta \sin M + \gamma \sin N = 0.$$

En éliminant  $\alpha$  entre cette équation et \*

$$a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + 2f\beta\gamma + 2g\gamma\alpha + 2h\alpha\beta = 0,$$

nous aurons l'équation de deux droites parallèles aux asymptotes de la courbe

$$R\beta^2 + Q\gamma^2 + 2P'\beta\gamma = 0,$$

où

$$R = a \sin^2 M + b \sin^2 L - 2h \sin L \sin M,$$

$$Q = a \sin^2 N + c \sin^2 L - 2g \sin L \sin N,$$

$$P' = a \sin M \sin N + f \sin^2 L - g \sin L \sin M - h \sin L \sin N.$$

Les bissectrices des angles de ces droites sont parallèles aux axes; leur équation est

$$\frac{R\beta + P'\gamma}{Q\gamma + P'\beta} = \frac{\beta - \gamma \cos L}{\gamma + \beta \cos L}.$$

Mais l'un des axes fait des angles A, B, C avec les côtés de LMN; en conséquence

$$\beta : \gamma = \sin B : \sin C.$$

On a aussi

$$\pi - N = B - A,$$

$$\pi - L = C - B,$$

$$\pi - M = 2\pi - (C - A);$$

ainsi

$$\sin L : \sin M : \sin N = \sin(B - C) : \sin(C - A) : \sin(A - B).$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{R \sin B + P' \sin C}{Q \sin C + P' \sin B} &= \frac{\sin B - \sin C \cos(B - C)}{\sin C - \sin B \cos(B - C)} \\ &= \frac{\cos C \sin(B - C)}{-\cos B \sin(B - C)}, \end{aligned}$$

ou

$$R \sin 2B + Q \sin 2C + 2P' \sin(B + C) = 0.$$



En remplaçant  $R, Q, P'$  par leurs valeurs, la relation devient divisible par  $\sin^2 (B - C)$ , et le résultat de M. Cambier est vérifié.

*Note.* — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc; L. Goulin, élève du lycée de Rouen; Chabanel, A. Minozzi, à Naples.