

E. AMIGUES

**Génération de certaines surfaces par  
leurs lignes de courbure**

*Nouvelles annales de mathématiques 2<sup>e</sup> série*, tome 16  
(1877), p. 337-360

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1877\\_2\\_16\\_\\_337\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__337_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1877, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## GÉNÉRATION DE CERTAINES SURFACES PAR LEURS LIGNES DE COURBURE;

PAR M. E. AMIGUES,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Nice.

### 1. Les trois équations

$$(1) \quad f(x, y, z) = \mu,$$

$$(2) \quad f_1(x, y, z) = \nu,$$

$$(3) \quad \varphi(\mu, \nu) = 0$$

contiennent, outre les variables  $x, y, z$ , les variables auxiliaires  $\mu$  et  $\nu$ , que l'on pourrait éliminer. Le système de ces trois équations représente donc une surface A.

L'équation (1) représente une famille de surfaces, l'équation (2) une autre famille, et pour tout système de valeurs de  $\mu$  et de  $\nu$ , qui est solution de l'équation (3), l'ensemble des équations (1) et (2) représente une courbe tracée sur la surface A.

On peut regarder cette surface A comme engendrée par ces diverses courbes.

2. L'équation de la surface A en coordonnées rectilignes est évidemment

$$\varphi[f(x, y, z), f_1(x, y, z)] = 0.$$

Le plan tangent en un point  $xyz$  de cette surface a donc pour équation

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\varphi}{d\mu} \left[ (X-x) \frac{df}{dx} + (Y-y) \frac{df}{dy} + (Z-z) \frac{df}{dz} \right] \\ + \frac{d\varphi}{d\nu} \left[ (X-x) \frac{df_1}{dx} + (Y-y) \frac{df_1}{dy} + (Z-z) \frac{df_1}{dz} \right] = 0. \end{array} \right.$$

Par le point  $xyz$  passe une des courbes génératrices, qui est l'intersection des surfaces

$$(5) \quad f(x, y, z) = \mu,$$

$$(6) \quad f_1(x, y, z) = \nu.$$

Les plans tangents menés en ce point à ces deux surfaces sont représentés par les équations

$$(7) \quad (X - x) \frac{df}{dx} + (Y - y) \frac{df}{dy} + (Z - z) \frac{df}{dz} = 0,$$

$$(8) \quad (X - x) \frac{df_1}{dx} + (Y - y) \frac{df_1}{dy} + (Z - z) \frac{df_1}{dz} = 0.$$

Considérons les trois plans tangents (4), (7), (8) qui contiennent tous trois la tangente au point  $xyz$  de la ligne d'intersection des surfaces (5) et (6). Soient d'ailleurs  $X, Y, Z$  les coordonnées d'un point du plan tangent (4). En désignant par  $p$  et  $p_1$  les distances de ce point avec deux autres plans tangents, nous avons

$$p = \frac{(X - x) \frac{df}{dx} + (Y - y) \frac{df}{dy} + (Z - z) \frac{df}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2}},$$

$$p_1 = \frac{(X - x) \frac{df_1}{dx} + (Y - y) \frac{df_1}{dy} + (Z - z) \frac{df_1}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{df_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df_1}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df_1}{dz}\right)^2}}.$$

D'après ces valeurs, l'équation (4) devient

$$p \frac{d\varphi}{d\mu} \sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2} + p_1 \frac{d\varphi}{d\nu} \sqrt{\left(\frac{df_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df_1}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df_1}{dz}\right)^2} = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{\rho^2}{\rho_1^2} = \frac{\left(\frac{d\varphi}{d\nu}\right)^2 \left(\frac{df_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df_1}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df_1}{dz}\right)^2}{\left(\frac{d\varphi}{d\mu}\right)^2 \left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2}.$$

Il peut arriver que le rapport

$$\frac{\sum \left(\frac{df_i}{dr}\right)^2}{\sum \left(\frac{df}{dx}\right)^2},$$

qui est indépendant de  $X, Y, Z$ , soit en outre le même tout le long de la courbe considérée, c'est-à-dire que, si l'on tire  $x$  et  $y$  des équations (5) et (6) pour porter dans ce rapport, la variable  $z$  disparaisse d'elle-même. Dans ce cas-là on a

$$\frac{\rho^2}{\rho_1^2} = F(\mu_1, \nu_1).$$

3. Imaginons que toute courbe  $(\mu_1, \nu_1)$  tracée sur la surface  $A$  soit ligne de courbure sur la surface  $\mu_1$  et aussi sur la surface  $\nu_1$ . Alors ces deux surfaces  $\mu_1$  et  $\nu_1$  se coupent sous un angle constant tout le long de cette ligne de courbure commune. Si, en outre, le rapport

$$\frac{\sum \left(\frac{df_i}{dx}\right)^2}{\sum \left(\frac{df}{dx}\right)^2}$$

cesse de contenir  $z$  dès que l'on y porte les valeurs de  $x$  et de  $y$  tirées des équations (1) et (2), le rapport  $\frac{\rho}{\rho_1}$  est constant le long de chacune de ces courbes génératrices. D'où il faut conclure que la surface  $A$ , tout le

long de chacune de ces courbes génératrices, coupe sous un angle constant chacune des deux surfaces dont cette génératrice est l'intersection ; et, par conséquent, que ces courbes génératrices forment une série de lignes de courbure sur la surface  $A$ .

La conclusion de ce qui précède est facile à tirer. Toutes les fois que l'on aura trouvé deux familles de surfaces

$$(9) \quad f(x, y, z) = \mu,$$

$$(10) \quad f_1(x, y, z) = \nu,$$

telles que l'intersection de toute surface de la première famille par toute surface de la seconde soit une ligne de courbure commune, et telles en outre que le rapport

$$\frac{\sum \left( \frac{df_1}{dx} \right)^2}{\sum \left( \frac{df}{dx} \right)^2}$$

ne contienne plus  $z$  dès qu'on y portera les valeurs de  $x$  et de  $y$  tirées des équations (9) et (10), alors toute équation

$$\varphi[f(x, y, z), f_1(x, y, z)] = 0$$

représentera, quelle que soit la fonction  $\varphi$ , une surface engendrée par ses propres lignes de courbure.

#### 4. Soit un système triplement orthogonal

$$f(x, y, z) = \rho,$$

$$f_1(x, y, z) = \rho_1,$$

$$f_2(x, y, z) = \rho_2.$$

Supposons que ce système satisfasse à cette condition

que le rapport

$$\frac{\sum \left( \frac{df_1}{dx} \right)^2}{\sum \left( \frac{df}{dx} \right)^2}$$

ne dépende pas de  $\rho_2$  quand on y remplace  $x, y, z$  par leurs valeurs en fonction de  $\rho, \rho_1, \rho_2$ .

S'il en est ainsi, toute équation telle que

$$\varphi(\rho, \rho_1) = 0$$

représente une surface dans laquelle les lignes de courbure de la première série sont les intersections de surface  $f$  avec des surfaces  $f_1$ .

La seconde série est alors facile à trouver; car toute surface  $f_2$  est perpendiculaire à toute ligne de courbure de la première série, et par conséquent coupe la surface  $\varphi$  suivant une ligne de courbure de la seconde série.

On voit combien il y a intérêt à chercher les systèmes orthogonaux qui satisfont à la condition précédente.

Adoptant les notations de M. Lamé, nous écrirons

$$ds^2 = H^2 d\rho^2 + H_1^2 d\rho_1^2 + H_2^2 d\rho_2^2.$$

Les formules élémentaires de la théorie des systèmes orthogonaux nous donnent

$$\sum \left( \frac{df_1}{dx} \right)^2 = \frac{1}{H_1^2}, \quad \sum \left( \frac{df}{dx} \right)^2 = \frac{1}{H^2}.$$

Il s'agit donc de chercher les systèmes orthogonaux pour lesquels le rapport  $\frac{H}{H_1}$  ne dépend pas de  $\rho_2$ .

Soit  $G$  une fonction de  $\rho$  et de  $\rho_1$  ne contenant pas  $\rho_2$ , on a

$$(11) \quad H = H_1 G.$$

Considérons alors avec M. Darboux les six quantités

définies par la formule suivante, où  $j$  est différent de  $i$  :

$$\beta_j = \frac{1}{H_i} \frac{dH_j}{d\rho_i}.$$

D'après cette définition, on a

$$(12) \quad \beta_{20} = \frac{1}{H_2} \frac{dH}{d\rho_2},$$

c'est-à-dire, en différentiant l'équation (11),

$$\beta_{20} = \frac{1}{H_2} G \frac{dH_1}{d\rho_2},$$

et, par suite,

$$(13) \quad \beta_{20} = G \beta_{21}.$$

Or M. Darboux a justement étudié les systèmes qui satisfont à la condition (13), et il a fait voir que leur recherche se ramène à celle d'une fonction  $V$  des trois variables  $\rho, \rho_1, \rho_2$ , fonction qui est définie par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d_2 V}{d\rho d\rho_1} = \left( \frac{dV}{d\rho} + P \right) \left( \frac{dV}{d\rho_1} + Q \right),$$

dans laquelle  $P$  et  $Q$  sont des fonctions de  $\rho$  et  $\rho_1$  seulement et ne contiennent pas  $\rho_2$ .

5. Soit

$$f(r, y, z) = \frac{(r - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - R^2}{Ax + By + Cz + D},$$

$$f_1(r, y, z) = \frac{(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2 - R_1^2}{Ax + By + Cz + D}.$$

Considérant alors les deux familles de sphères

$$f(x, y, z) = \mu,$$

$$f_1(x, y, z) = \nu,$$

on obtient sans difficulté

$$\sum \left( \frac{df}{dx} \right)^2 = \frac{(A^2 + B^2 + C^2)\mu^2 + 4(Aa + Bb + Cc + D)\mu + 4R^2}{(Ax + By + Cz + D)^2},$$

et, par conséquent,

$$\frac{\sum \left( \frac{df_1}{dx} \right)^2}{\sum \left( \frac{df}{dx} \right)^2} = \frac{(A^2 + B^2 + C^2)\nu^2 + 4(Aa_1 + Bb_1 + Cc_1 + D)\nu + 4R_1^2}{(A^2 + B^2 + C^2)\mu^2 + 4(Aa + Bb + Cc + D)\mu + 4R^2}.$$

Ce rapport ne dépend que de  $\mu$  et  $\nu$ . Comme, d'ailleurs, deux sphères se coupent suivant une ligne de courbure commune, si l'on représente par  $\varphi$  une fonction quelconque, l'équation

$$\varphi[f(x, y, z), f_1(x, y, z)] = 0$$

représente une surface engendrée par ses propres lignes de courbure. En laissant la fonction  $\varphi$  arbitraire, on a toute une famille de surfaces analogues. Nous allons étudier cette famille  $\varphi$ .

Toute sphère  $f$  passe par un cercle fixe situé dans le plan

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Toute sphère  $f_1$  passe par un autre cercle fixe situé dans le même plan.

Ces deux cercles, situés dans un même plan, se coupent en deux points A et B réels ou imaginaires conjugués.

La courbe génératrice, intersection d'une sphère  $f$  et d'une sphère  $f_1$ , est un cercle variable assujéti à passer par deux points fixes A et B réels ou imaginaires conjugués. Pour ce motif, nous appellerons toute surface  $\varphi$  une *gyrocyclide*. Le tore est la plus simple de



toutes. On voit tout de suite que, si l'équation

$$\varphi(\mu, \nu) = 0$$

est algébrique et de degré  $m$ , l'équation

$$\varphi[f(x, y, z), f_1(x, y, z)] = 0$$

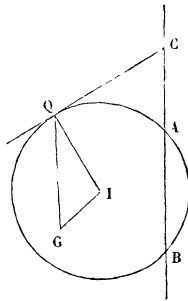
représente une gyrocyclide algébrique qui, en général, est de degré  $2m$ .

6. Nous savons que les cercles générateurs de toute gyrocyclide constituent sur cette surface une série de lignes de courbure. Un théorème très-simple va nous donner les lignes de courbure de l'autre série. Voici l'énoncé de ce théorème :

*Que d'un point quelconque C de la droite AB on mène une tangente CQ à l'un des cercles générateurs ; que du point C comme centre avec CQ pour rayon on décrive une sphère. Cette sphère coupera la gyrocyclide suivant une ligne de courbure de la deuxième série.*

En effet, le point C a même puissance par rapport à

Fig. 1.



tous les cercles générateurs, de sorte que, si l'on mène de ce point des tangentes à tous ces cercles, toutes ces

tangentes sont égales, et le lieu des points de contact est l'intersection de la gyrocyclide et d'une sphère ayant pour centre le point C.

Soient P un de ces cercles et Q le point de contact correspondant. Puisque la gyrocyclide coupe l'une des sphères qui ont fourni le cercle générateur P sous un angle qui est constant le long de ce cercle, on peut inscrire à cette gyrocyclide une sphère ayant pour ligne de contact le cercle P et pour centre un point G de la perpendiculaire menée au plan du cercle P par le centre I de ce cercle. Ce fait sera d'ailleurs établi plus loin directement.

Quoi qu'il en soit, constatons que GI est perpendiculaire au plan du cercle P, et IQ à CQ, d'où il suit que GQ est perpendiculaire à CQ.

Or CQ est normale à la sphère qui a pour centre C, GQ est normale à la sphère qui a pour centre G et, par suite, à la gyrocyclide. Ainsi la gyrocyclide et la sphère de centre C se coupent à angle droit tout le long de leur intersection, ce qui établit que cette intersection est une ligne de courbure de la gyrocyclide.

Si tous ces cercles générateurs sont égaux, la gyrocyclide se réduit à un tore, et la seconde série des lignes de courbure se compose aussi de cercles.

7. Cherchons le lieu des centres des cercles de courbure générateurs.

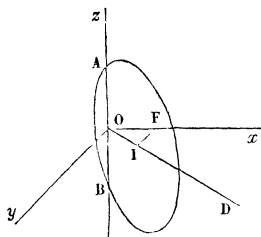
La direction de AB est toujours réelle, ainsi que le milieu O de AB. Prenons AB pour axe des  $z$  et le point O pour origine. Supposons d'ailleurs le plan des  $xy$  perpendiculaire à AB, et les axes  $Ox$ ,  $Oy$  perpendiculaires entre eux. Posons en outre

$$OA^2 = OB^2 = K,$$

de telle sorte que, si A et B sont imaginaires, la quantité K se trouve négative.

Soit un cercle générateur quelconque situé dans le plan  $zOD$  et dont le centre I est sur la droite OD du plan des  $xy$ . Par le point I menons dans le plan des  $xy$  une perpendiculaire à OD qui coupe Ox au point F.

Fig. 2.



Le cercle générateur peut être regardé comme l'intersection du plan  $zOD$  et d'une sphère ayant F pour centre et FA pour rayon.

Désignons l'angle  $xOD$  par  $\omega$  et la longueur OI par  $u$ .

L'équation du plan est

$$(14) \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tang} \omega,$$

et celle de la sphère

$$(15) \quad \frac{x^2 + y^2 + z^2 - K}{x} = \frac{2u}{\cos \omega}.$$

Posons

$$(16) \quad \operatorname{tang} \omega = \mu, \quad \frac{2u}{\cos \omega} = \nu.$$

Les équations du cercle générateur sont alors

$$(17) \quad \frac{y}{x} = \mu, \quad \frac{x^2 + y^2 + z^2 - K}{x} = \nu,$$

et, en désignant par  $\varphi$  une fonction arbitraire, l'équation générale des gyrocyclides engendrées par les cercles qui passent en A et B est

$$(18) \quad \varphi(\mu, \nu) = 0,$$

ou bien

$$(19) \quad \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{x^2 + y^2 + z^2 - K}{x}\right) = 0,$$

ou encore

$$(20) \quad F(x, y) = 0.$$

Si l'équation d'une gyrocyclide est donnée sous la forme (18) ou (19), le lieu des centres s'obtient sans difficulté. On n'a qu'à remplacer dans l'équation (18)  $\mu$  et  $\nu$  par leurs valeurs (16). L'équation polaire du lieu des centres est ainsi

$$\varphi\left(\operatorname{tang} \omega, \frac{2u}{\cos \omega}\right) = 0,$$

et son équation rectiligne

$$(21) \quad \varphi\left[\frac{y}{x}, \frac{x^2 + y^2}{x}\right] = 0.$$

L'équation (21) prouve que, pour avoir le lieu des centres, il suffit, dans l'équation (19) de la gyrocyclide, de remplacer  $z$  par zéro, et  $-K$  par  $x^2 + y^2$ .

L'équation (21) fait voir aussi que, si la gyrocyclide est algébrique, la courbe lieu des centres est algébrique et du même degré.

Si l'équation de la gyrocyclide est donnée sous la forme (20), pour avoir le lieu des centres, on remplacera aussi dans l'équation (20)  $z$  par zéro, et  $-K$  par  $x^2 + y^2$ .

Le problème est donc complètement résolu.

Traisons la question inverse. On donne le lieu des centres dans le plan des  $xy$  et les deux points A et B sur l'axe des  $z$  équidistants de l'origine. On veut trouver l'équation de la gyrocyclide.

Le lieu des centres est donné en coordonnées rectilignes. On passe aux coordonnées polaires  $u$  et  $\omega$ . Portant alors dans cette équation les valeurs de  $u$  et  $\omega$  tirées des formules (16), on obtient une équation entre  $\mu$  et  $\nu$ , qui est l'équation (18) de la gyrocyclide. Remplaçant  $\mu$  et  $\nu$  par les valeurs de la formule (17), on aura l'équation de la gyrocyclide sous la forme (19).

Ainsi, pour le tore, l'équation polaire du lieu des centres des cercles générateurs est

$$(22) \quad u^2 = a^2;$$

or des équations (16) on tire

$$u^2 = \frac{\nu^2}{4(1 + \mu^2)}.$$

Portant cette valeur dans l'équation (22), on a pour équation du tore

$$\nu^2 = 4a^2(1 + \mu^2),$$

ou encore

$$(x^2 + y^2 + z^2 - K)^2 = 4a^2(x^2 + y^2).$$

8. La construction de la surface se ramène sans difficulté à celle de la courbe lieu des centres des cercles générateurs.

Soit en effet  $r$  le rayon du cercle générateur I. On a

$$r^2 = u^2 + K.$$

Si donc on suppose la courbe lieu des centres déjà tracée, on aura sans peine la surface en construisant le cercle  $r$  pour chaque point I de cette courbe.

Si  $K > 0$ , les points A et B sont réels et l'on a

$$r^2 = u^2 + OA^2 = IA^2.$$

Dans le cas contraire, posons

$$K = -b^2,$$

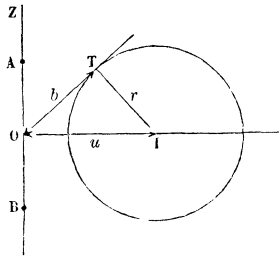
alors

$$r^2 = u^2 - b^2;$$

sur  $u$  comme diamètre on décrira un cercle, et du point O comme centre avec  $b$  pour rayon on décrira un second cercle coupant le premier en H. IH sera le rayon du cercle générateur.

9. Dans le cas où les points A et B sont imaginaires,

Fig. 3.



le volume limité par une gyrocyclide se met sous la forme d'une intégrale simple

$$OA^2 = K = -b^2;$$

$b$  représente la longueur de la tangente menée du point O au cercle, car on a

$$r^2 = u^2 - b^2.$$

De cette relation on tire

$$r dr = u du,$$

$$\frac{dr}{du} = \frac{u}{r},$$

c'est-à-dire que  $dr > du$ . Alors le volume limité par la gyrocyclide et par deux plans voisins menés par AB, et faisant entre eux un angle  $\Delta\omega$ , est compris entre deux fractions de tore, de telle façon qu'en désignant ce volume par  $\Delta V$  on a

$$\pi r^2 \cdot 2\pi u \frac{\Delta\omega}{2\pi} < \Delta V < \pi(r + \Delta r)^2 2\pi(u + \Delta u) \frac{\Delta\omega}{2\pi},$$

d'où l'on conclut

$$dV = \pi r^2 u d\omega = \pi(u^2 - b^2) u d\omega.$$

Le volume compris entre deux plans menés par AB est donc

$$V = \pi \int_a^b (u^2 - b^2) u d\omega.$$

Si la courbe lieu des centres est simple, on calcule aisément cette intégrale. Cela arrive en particulier si cette courbe est une spirale.

10. Nous avons constaté qu'on pouvait circoncrire une sphère à la gyrocyclide le long de chaque cercle générateur. Il en résulte que toute gyrocyclide peut être envisagée comme l'enveloppe d'une sphère variable. Nous allons étudier la surface à ce nouveau point de vue.

Deux cercles générateurs quelconques sont sur une même sphère bitangente à la surface aux points A et B. Si leurs plans se confondent, cette sphère bitangente devient tangente à la surface tout le long du cercle générateur.

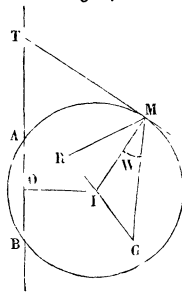
De là une nouvelle démonstration de ce fait que les cercles générateurs forment une première série de lignes de courbure, et aussi que l'on peut trouver une sphère tangente à la surface le long de chaque cercle gén-

rateur, remarque qui donne aussitôt les lignes de courbure de la seconde série.

Les sphères tangentes à la surface le long de chaque cercle générateur passent toutes par les points A et B réels ou imaginaires et ont pour lieu de leurs centres une courbe située dans un plan perpendiculaire au milieu de AB.

Soit I le centre de l'un des cercles. La sphère tangente à la surface le long de ce cercle aura son centre G

Fig. 4.



sur une perpendiculaire menée par I au plan du cercle. Le carré du rayon de cette sphère sera

$$\overline{GA}^2 \text{ ou bien } \overline{GO}^2 + K.$$

Si l'on imagine une sphère ayant pour centre O, et pour carré du rayon  $-K$ , cette sphère sera évidemment orthogonale à la précédente. Elle sera imaginaire si les points A et B sont réels, et réelle si les points A et B sont imaginaires.

Ainsi, la gyrocyclide est l'enveloppe d'une sphère dont le centre décrit une courbe plane et qui passe en outre par deux points fixes réels ou imaginaires conjugués, symétriques par rapport au plan de cette courbe.

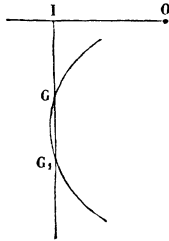
Ou bien encore la gyrocyclide est l'enveloppe d'une



sphère dont le centre décrit une courbe plane et qui reste orthogonale à une sphère réelle ou imaginaire dont le centre est dans le plan de la courbe.

11. Désignons par (B) la courbe lieu des points I, centres des cercles générateurs, et par (C) la courbe lieu des points G, centres des sphères enveloppées.

Fig. 5.



Soient G et  $G_1$  deux points voisins de la courbe (C). Ces deux points sont les centres de deux sphères. Ces deux sphères se coupent suivant un cercle dont le plan est perpendiculaire à  $GG_1$  et dont le centre est sur  $GG_1$ . Comme, d'autre part, le plan de ce cercle passe par A et par B, aussi bien que les sphères, son centre doit être le pied I de la perpendiculaire abaissée du point O sur  $GG_1$ .

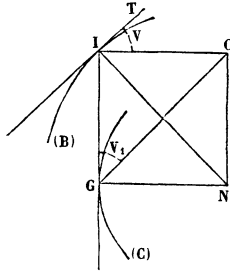
Si alors on considère que  $GG_1$  est une tangente à la courbe (C), on voit que la courbe (B), lieu du point I, est la podaire de la courbe (C) par rapport au point O. Si donc la courbe (C) est de classe  $p$ , la courbe (B) sera en général d'ordre  $2p$ . Si la courbe (C) est une conique, la courbe (B) et la surface seront en général du quatrième ordre.

12. Étudions à ce propos quelques propriétés des podaires.

Soit G un point quelconque de la courbe (C) et la

tangente en ce point. Du point fixe  $O$  abaissons une perpendiculaire  $OI$  sur cette tangente : le lieu des points  $I$  est la courbe (B), podaire de la courbe (C).

Fig. 6.



Soient  $u = OI$  et  $\omega$  l'angle de  $OI$  avec une droite fixe. L'équation polaire de la courbe (B) est une relation entre  $u$  et  $\omega$ , et il est clair que  $GI$  est une fonction de  $u$  et de  $\omega$ . On trouve sans peine  $GI = \frac{du}{d\omega}$ . Il n'y a pour cela qu'à considérer la courbe (C) comme l'enveloppe des droites  $IG$ , obtenues comme il suit. On joint le point  $O$  aux divers points  $I$  de la courbe (B), et par chaque point  $I$  on élève à  $OI$  une perpendiculaire.

Cette formule simple

$$GI = \frac{du}{d\omega}$$

peut s'interpréter géométriquement de bien des manières.

Soit  $V$  l'angle du rayon vecteur  $OI$  avec la tangente en  $I$  à la courbe (B). Soient, en outre,

$$OG = u_1, \quad OGI = V_1.$$

On sait que

$$\text{tang } V = \frac{u}{\frac{du}{d\omega}}.$$

D'autre part, le triangle IOG donne

$$\text{tang } V_1 = \frac{u}{\frac{du}{d\omega}}.$$

On conclut de là  $V = V_1$ .

Ainsi aux points correspondants des deux courbes la tangente fait le même angle avec le rayon vecteur.

On peut dire encore que la longueur IG est la sous-normale de la courbe (B) au point I; d'où la construction suivante pour le point G. On mène ON et IG, perpendiculaires à OI, ainsi que la normale IN au point I de la courbe. On complète le rectangle IONG. Le sommet opposé au point O est le point G.

On peut encore traduire autrement la formule

$$IG = \frac{du}{d\omega};$$

car soient  $ds$  et  $ds_1$  les longueurs de deux arcs infiniment petits en I et en G, on a

$$\begin{aligned} du &= ds \cos V, \\ du_1 &= ds_1 \cos V_1, \end{aligned}$$

et, comme  $V = V_1$ ,

$$\frac{du}{du_1} = \frac{ds}{ds_1}.$$

13. La section normale faite dans la gyrocyclide par le plan TMG (*fig. 4*) est une section principale. En appliquant le théorème de Meunier au cercle générateur, on voit que MG est le rayon de courbure de cette section principale. La valeur de MG, qui est aussi le rayon de la sphère enveloppée, se calcule d'ailleurs sans peine :

$$\overline{MG}^2 = (u^2 + K) + \left( \frac{du}{d\omega} \right)^2,$$

ou encore

$$\overline{MG}^2 = u^2 + K.$$

En désignant par  $\omega$  l'angle GMI, on a évidemment

$$\text{tang } \omega = \frac{\frac{du}{d\omega}}{\sqrt{u^2 + K}}.$$

L'équation qui caractérise les gyrocyclides pour lesquelles cet angle  $\omega$  est constant est, d'après cela,

$$\frac{du}{\sqrt{u^2 + K}} = A d\omega,$$

d'où l'on tire

$$u = \frac{C}{2} a^\omega - \frac{K}{2C} a^{-\omega},$$

C étant une constante arbitraire et  $a$  étant égal à  $e^A$ .

Cette équation définit les gyrocyclides considérées.

14. Les gyrocyclides du quatrième ordre sont des enveloppes de sphères dont les centres sont sur une conique et qui restent orthogonales à une sphère fixe ayant son centre dans le plan de la conique, et dont le carré du rayon est  $-K$ .

Prenons pour axes de coordonnées les axes de la conique et une droite menée par son centre perpendiculairement à son plan. La conique est représentée alors par les équations

$$z = 0, \quad \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 1.$$

Nous supposerons  $A - B > 0$ , et aussi  $A > 0$ , et nous appellerons  $\sqrt{A}$  le *demi-grand* axe.

Le centre de la sphère donnée a pour coordonnées  $x = a, y = b, z = 0$ .

Dans ces conditions, on trouve facilement l'équation de l'enveloppe des sphères. Cette équation est

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - b^2 - K)^2 \\ = 4A(x-a)^2 + 4B(y-b)^2. \end{array} \right.$$

La seconde série de lignes de courbure se compose de cycliques.

15. Pour  $b = 0$ , la surface a un second plan de symétrie, et son équation devient

$$(23) \quad (x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - K)^2 = 4A(x-a)^2 + 4By^2.$$

Il est naturel de chercher si, dans certains cas, ces deux plans de symétrie ne jouent pas le même rôle. Remarquons à cet effet que l'équation précédente peut s'écrire

$$\begin{aligned} & (x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - K - 2B) \\ & = 4A(x-a)^2 + 4By^2 \\ & \quad - 4B(x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - K) + 4B^2, \end{aligned}$$

ou bien

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - K - 2B)^2 \\ = 4(A-B)x^2 - 8Aax \\ \quad + 4(A+B)a^2 + 4KB + 4B^2 - 4Bz^2. \end{array} \right.$$

$y$  et  $z$  n'auront fait que changer de rôle dans les équations (23) et (24), si le second membre de cette dernière, abstraction faite du terme en  $z^2$ , est un carré parfait en  $x$ , c'est-à-dire si l'on a

$$(25) \quad Ba^2 = (A-B)(B+K).$$

Il est facile de traduire cette condition géométriquement : elle signifie que la sphère donnée est bitangente

à la conique donnée; la corde des contacts a pour équations

$$(26) \quad z = 0, \quad x = \frac{Aa}{A-B}.$$

Pour la valeur de K, fournie par l'équation (25), l'équation (24) s'écrit

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left( x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - \frac{Ba^2}{A-B} - B \right)^2 \\ & = 4(A-B) \left[ x - \frac{Aa}{A-B} \right]^2 - 4Bz^2, \end{aligned} \right.$$

ce qui prouve que la gyrocyllide est aussi l'enveloppe de sphères dont les centres sont sur la conique réelle

$$y = 0, \quad \frac{x^2}{A-B} - \frac{z^2}{B} = 1,$$

et qui restent orthogonales à une sphère fixe ayant pour centre

$$x = \frac{Aa}{A-B}, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

et dont le carré du rayon est facile à trouver. Considérons pour cela l'équation (23), où le carré du rayon s'obtient en prenant la partie constante qui est dans la parenthèse du premier membre, et en lui ajoutant le carré de l'abscisse du centre  $a$ .

Opérant de même dans l'équation (27), c'est-à-dire ajoutant à la partie constante qui est dans la parenthèse du premier membre le carré de l'abscisse du centre  $\frac{Aa}{A-B}$ , on obtient pour carré du rayon de la sphère fixe

$$-a^2 - \frac{Ba^2}{A-B} - B + \frac{A^2a^2}{(A-B)^2}.$$

Remarquons que le centre de la seconde sphère est

sur la corde des contacts de la première conique et de la première sphère.

On voit ainsi que la surface, pour la valeur de  $K$  donnée par l'équation (25), est susceptible d'un second mode de génération absolument analogue au premier. La seconde série de lignes de courbure se compose donc de cercles générateurs coupant tous aux mêmes points la droite

$$z = 0, \quad x = \frac{Aa}{A - B},$$

c'est-à-dire la corde des contacts de la première conique et de la première sphère. Les points fixes de ces nouveaux cercles sont d'ailleurs les points de contact.

En d'autres termes, pour la valeur de  $K$  donnée par l'équation (25), on a la surface de Charles Dupin. On pourrait l'appeler la *digyrocyclide*.

On s'assurera aisément que, dans la digyrocyclide, la première conique et la première sphère d'une part, et d'autre part la deuxième conique et la deuxième sphère, jouent absolument un rôle réciproque. Ainsi les foyers de l'une des coniques sont les sommets de l'autre.

16. Si, au lieu de supposer  $b = 0$ , on avait supposé  $a = 0$ , on serait arrivé au même résultat, mais la deuxième conique eût été imaginaire.

Si l'on suppose  $a = b = 0$ , les résultats précédents subsistent, mais ils deviennent un peu plus simples.

Enfin, si l'on a en même temps

$$a = b = 0 \quad \text{et} \quad A = B,$$

on obtient

$$(x^2 + y^2 + z^2 - K)^2 = 4A(x^2 + y^2),$$

ce qui est le tore.

17. Examinons un autre cas intéressant : soit la conique fixe

$$z = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Posons, comme d'habitude,

$$a^2 - b^2 = c^2,$$

soit  $\alpha$  le rayon de la sphère fixe, que l'on suppose réelle, et soient  $x = c, y = 0, z = 0$  les coordonnées de son centre. La gyrocyclide enveloppe a dès lors pour équation

$$(x^2 + y^2 + z^2 - c^2 + \alpha^2)^2 = 4a^2(x - c)^2 + 4b^2y^2.$$

La podaire de la conique, lieu des centres des cercles générateurs, est, dans ce cas, très-simple. C'est le cercle

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Transportant l'origine au centre de la sphère fixe, et transformant en polaires, on a pour équation de ce cercle

$$(28) \quad u^2 + 2(c \cos \omega)u - b^2 = 0.$$

Le volume de la gyrocyclide étant désigné par  $V$ , on sait que l'on a

$$\frac{1}{2} V = \int_0^\pi (u^2 - \alpha^2) u d\omega.$$

Faisant le changement de variable indiqué par l'équation (28), on a

$$(29) \quad \frac{1}{2} V = \int_{a-c}^{a+c} \frac{(u^2 - \alpha^2)(u^2 + b^2) du}{\sqrt{(2cu + b^2 - u^2)(2cu - b^2 + u^2)}}.$$

Ainsi le volume dépend d'une intégrale elliptique.

Transformons homographiquement cette gyrocyclide



en posant

$$x = m X + n Y + p Z + q,$$

$$y = m_1 X + n_1 Y + p_1 Z + q_1,$$

$$z = m_2 X + n_2 Y + p_2 Z + q_2.$$

Nous avons ainsi une nouvelle surface du quatrième ordre, qui est une des surfaces étudiées par M. Kummer (*Journal de Crelle*).

Tous les plans représentés par l'équation suivante :

$$m_1 X + n_1 Y + p_1 Z + q_1 = \lambda (m X + n Y + p Z + q)$$

coupent cette surface suivant deux coniques, et toutes ces coniques coupent en deux points indépendants de  $\lambda$  la droite représentée par les équations suivantes :

$$m_1 X + n_1 Y + p_1 Z + q_1 = 0,$$

$$m X + n Y + p Z + q = 0.$$

Le volume limité par cette nouvelle surface s'obtient en combinant la formule (29) avec une formule que nous avons donnée dans un travail antérieur (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1873). On obtient ainsi

$$\frac{1}{2} V_1 = \begin{vmatrix} m & n & p \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} \int_{a-c}^{a+c} \frac{(u^2 - a^2)(u^2 + b^2) du}{\sqrt{(2cu + b^2 - u^2)(2cu - b^2 + u^2)}}.$$