

MOREAU

Questions proposées par M. S. Réalis

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 16
(1877), p. 315-318

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__315_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1877, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUESTIONS PROPOSÉES PAR M. S. RÉALIS

(voir 2^e série, t. XV, p. 472);

SOLUTIONS DE M. MOREAU,

Capitaine d'Artillerie.

Considérons le développement

$$\begin{aligned} f(m, x) &= 1 - m\varphi(x) + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \varphi(x)\varphi(x+1) - \dots \\ &\quad \pm \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k} \varphi(x)\varphi(x+1)\dots\varphi(x+k-1) \mp \dots \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
 f(m-1, x) &= 1 - (m-1)\varphi(x) + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} \varphi(x)\varphi(x+1) - \dots \\
 &\quad \pm \frac{(m-1)(m-2)\dots(m-k)}{1 \cdot 2 \dots k} \varphi(x)\varphi(x+1)\dots\varphi(x+k-1) \mp \dots,
 \end{aligned}$$

et l'on en tire, par soustraction,

$$\begin{aligned}
 f(m, x) - f(m-1, x) &= -\varphi(x) \left[1 - (m-1)\varphi(x+1) + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} \varphi(x+1)\varphi(x+2) - \dots \right],
 \end{aligned}$$

ou bien

$$f(m, x) = f(m-1, x) - \varphi(x)f(m-1, x+1).$$

Comme, d'ailleurs, on a évidemment

$$f(0, x) = 1,$$

la relation précédente permettra, dans certains cas, d'obtenir, sous une forme simple, la valeur de $f(m, x)$ lorsque m est un nombre entier positif.

Soit, par exemple,

$$\varphi(x) = \frac{ax+p}{ax+q},$$

on a

$$f(m, x) = f(m-1, x) - \frac{ax+p}{ax+q} f(m-1, x+1)$$

avec la condition initiale $f(0, x) = 1$.

De là, on déduit successivement

$$f(1, x) = 1 - \frac{ax+p}{ax+q} = \frac{q-p}{ax+q},$$

(317)

$$f(2, x) = \frac{q-p}{ax+q} - \frac{ax+p}{ax+q} \cdot \frac{q-p}{a(x+1)+q}$$

$$= \frac{(q-p)(q-p+a)}{(ax+q)(ax+q+a)},$$

$$f(3, x) = \frac{(q-p)(q-p+a)}{(ax+q)(ax+q+a)}$$

$$- \frac{ax+p}{ax+q} \frac{(q-p)(q-p+a)}{(ax+q+a)(ax+q+2a)}$$

$$= \frac{(q-p)(q-p+a)(q-p+2a)}{(ax+q)(ax+q+a)(ax+q+2a)}.$$

La loi de formation des valeurs de $f(m, x)$ est évidente; il est facile de voir, en outre, que, si elle est vraie pour m , elle est vraie aussi pour $m+1$; on peut donc écrire

$$f(m, x) = \frac{(q-p)(q-p+a) \dots [q-p+(m-1)a]}{(ax+q)(ax+q+a) \dots [ax+q+(m-1)a]}.$$

Pour simplifier, faisons maintenant $x=0$, ce qui ne diminue en rien la généralité de la formule obtenue, et nous pourrions dire que l'expression

$$\frac{(q-p)(q-p+a) \dots [q-p+(m-1)a]}{q(q+a) \dots [q+(m-1)a]},$$

dans laquelle m est un entier positif et p, q, a sont des nombres quelconques, se développe dans la suite terminée

$$1 - \frac{p}{q} m + \frac{p(p+a)}{q(q+a)} \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}$$

$$- \frac{p(p+a)(p+2a)}{q(q+a)(q+2a)} \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

Les trois questions proposées sont des conséquences

de cette propriété. Il faut prendre respectivement

Première question $a = 2$ $p = 1$ $q = n + 1$

Deuxième question $a = 2$ $p = n$ $q = n + 1$

Troisième question $a = 2$ $p = n$ $q = n + 2$

Note. — Autres solutions de MM. Bourguet, de Virieu, Moret-Blanc.