

## **Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales**

*Nouvelles annales de mathématiques 2<sup>e</sup> série*, tome 16  
(1877), p. 281-286

<[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1877\\_2\\_16\\_\\_281\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__281_1)>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1877, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

**SOLUTIONS DE QUESTIONS  
PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.**

---

*Question 1062*

(voir 2<sup>e</sup> série, t. XI, p. 96);

PAR M. ESCARY.

*Démontrer l'identité*

$$\begin{aligned}
 & [1 - 2(a + b + c + \dots)x + (a + b + c + \dots)(aA^2 + bB^2 + cC^2 + \dots)]^{\frac{1}{2}} \\
 &= \sum \sum \sum \dots \frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma}{\alpha! \beta! \gamma! \dots 2^{\alpha+\beta+\gamma+\dots}} \\
 &\times \frac{d^{\alpha+\beta+\gamma}(x^2 - A^2)^\alpha (x^2 - B^2)^\beta (x^2 - C^2)^\gamma \dots}{d.r^{\alpha+\beta+\gamma+\dots}},
 \end{aligned}$$


---

(\*) Cet instrument, nomme *alidade autoréductrice*, a pour objet de donner, par une simple lecture, la distance de deux points visibles ainsi que leur différence de niveau.

les sommations s'étendant à toutes les valeurs entières et positives de  $\alpha, \beta, \gamma$ , et  $\alpha!$  étant supposé devenir égal à 1 quand  $\alpha = 0$ . (F. DIDON.)

Si l'on considère l'équation du second degré

$$u = x + \frac{a}{2} (u^2 - A^2) + \frac{b}{2} (u^2 - B^2) + \frac{c}{2} (u^2 - C^2) + \dots,$$

dont les racines sont

$$u = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2(a+b+c+\dots)x + (a+b+c+\dots)(aA^2 + bB^2 + cC^2 + \dots)}}{a+b+c+\dots},$$

on voit que le développement, par la formule de Lagrange, de la plus petite de ces racines, fournit la démonstration de l'identité qu'il s'agit d'établir; car on a successivement

$$\begin{aligned} & [1 - 2(a+b+c+\dots)x + (a+b+c+\dots)(aA^2 + bB^2 + cC^2 + \dots)]^{-\frac{1}{2}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} d^n \left[ \frac{a}{2} (x^2 - A^2) + \frac{b}{2} (x^2 - B^2) + \frac{c}{2} (x^2 - C^2) + \dots \right]^n \\ &= \sum \sum \sum \dots \frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma}{\alpha! \beta! \gamma! \dots 2^{\alpha+\beta+\gamma+\dots}} \\ & \times \frac{d^{\alpha+\beta+\gamma+\dots} (x^2 - A^2)^\alpha (x^2 - B^2)^\beta (x^2 - C^2)^\gamma \dots}{dx^{\alpha+\beta+\gamma+\dots}}, \end{aligned}$$

en ayant égard à la valeur du développement d'une puissance entière d'un polynôme et observant que, pour  $b = 0, c = 0, \dots$  et  $A^2 = 1$ , on doit retomber sur les fonctions  $X_n$  de Legendre, ce qui exige que les  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  soient les mêmes comme indices de différentiation et comme exposants.

**Question 1222**(voir 2<sup>e</sup> série, t. XV, p. 141.);

PAR M. ARMAND BERTRAND,

Propriétaire à Azillanet (Hérault).

On donne sur un plan un point A et un cercle de rayon variable, mais dont le centre est fixe; on mène à ce cercle deux tangentes  $AM_1$ ,  $AM_2$  et la corde des contacts  $M_1M_2$ . A quelles valeurs du rayon variable correspond le maximum : 1° du périmètre du triangle  $AM_1M_2$ ; 2° de l'aire de ce triangle; 3° de la corde des contacts?

(HARKEMA.)

Posons, pour simplifier,  $AM_1 = AM_2 = t$ ,  $M_1O = r$ ,  $M_1M_2 = 2m$ ,  $AP = p$ ,  $AO = 2K$ .

1° *Maximum du périmètre*  $2(t + m)$ . — Nous pouvons considérer seulement le demi-périmètre  $t + m$ ; les deux triangles  $AM_1O$ ,  $AM_1P$  donnent

$$t = \sqrt{4K^2 - r^2}, \quad m = \frac{tr}{2K};$$

on a donc

$$t + m = \frac{\sqrt{4K^2 - r^2}(2K + r)}{2K} = \frac{(2K - r)^{\frac{1}{2}}(2K + r)^{\frac{3}{2}}}{2K}.$$

On voit facilement que la somme des facteurs est constante, et, par suite, que le maximum aura lieu pour la valeur de  $r$  satisfaisant à la relation

$$\frac{2K + r}{3} = \frac{2K - r}{1} = \frac{4K}{4},$$

d'où

$$r = K.$$

2° *Maximum de l'aire*  $pm$ . — Les deux triangles  $AM_1O$ ,  $AM_1P$  donnent

$$p = \frac{t^2}{2K}, \quad m = \frac{tr}{2K};$$

( 284 )

on a donc

$$pm = \frac{t^3 r}{4K^2} = \frac{(t^2)^{\frac{3}{2}} (r^2)^{\frac{1}{2}}}{4K^2}.$$

Or le triangle  $\Delta M_1 O$  donne

$$(1) \quad t^2 + r^2 = 4K^2 \text{ (quantité constante);}$$

le maximum aura donc lieu pour la valeur de  $r$  satisfaisant à

$$\frac{t^2}{3} = \frac{r^2}{1} = \frac{4K^2}{4},$$

d'où

$$r = K.$$

3° *Maximum de la corde 2m.* — Nous pouvons considérer seulement la demi-corde  $m$ ; nous avons trouvé précédemment

$$m = \frac{tr}{2K} = \frac{(t^2 r^2)^{\frac{1}{2}}}{2K}.$$

La relation (1) nous montre que le maximum aura lieu pour  $t^2 = r^2$ , c'est-à-dire, en vertu de la même relation, pour  $r^2 = 2K^2$  ou  $r = K\sqrt{2}$ .

*Remarque.* — On peut encore trouver ce dernier maximum par deux autres méthodes :

1° En posant  $OP = q$ , on a

$$m^2 = pq;$$

or,  $p + q$  est constant et égal à  $2K$  : donc le maximum aura lieu pour  $p = q = K = m$ , et, par suite, pour  $r = K\sqrt{2}$ , en vertu de la relation

$$r^2 = m^2 + q^2,$$

donnée par le triangle  $M, PO$ , qui devient

$$r^2 = 2K^2.$$

2° Les angles  $AM_1O$ ,  $AM_2O$  étant droits, le lieu des points  $M_1, M_2$  est la circonférence décrite sur  $AO$  comme diamètre; la corde  $M_1M_2$  sera donc maximum quand elle sera précisément l'un des diamètres du lieu, et, par suite, lorsque le triangle  $M_1PO$  donnera la relation

$$r^2 = 2K^2,$$

et que l'on aura par conséquent

$$r = K\sqrt{2}.$$

*Nota.* — La même question a été résolue par MM. Pisani, professeur (Italie); Droz, ingénieur à Zurich; Lez; Sondat: E. Flauquembergue, maître répétiteur au lycée de Saint-Quentin; Cauboue, Berthomieu, Barthe, Dussoudeix, élèves au lycée de Bordeaux; Bertaux (Léon), élève à l'athénée de Mons (classe de M. Cambier); Rousselot, élève au lycée de Saint-Brieuc; Biette, élève au lycée du Havre; A. Venard, du lycée de Clermont; Tarraud (Gabriel), élève en Mathématiques élémentaires au lycée de Châteauroux (classe de M. Escary); Henri Picat, du lycée de Grenoble; Georges Lambiotte.

M. Tarraud a donné les solutions des questions analogues, relatives à une sphère et au cône circonscrit.

### Question 1226

( voir 2<sup>e</sup> série, t. XVI, p. 192 );

PAR M. J. DE VIRIEU,

Professeur à Lyon.

ÉNONCÉ.

*Rendre calculable par logarithmes*

$$\sin x = \frac{\sin a + \sin b}{1 + \sin a \sin b}.$$

SOLUTION.

L'expression proposée donne

$$1 + \sin x = \frac{(1 + \sin a)(1 + \sin b)}{1 + \sin a \sin b},$$

$$1 - \sin x = \frac{(1 - \sin a)(1 - \sin b)}{1 + \sin a \sin b};$$

d'où

$$\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} = \left( \frac{1 + \sin a}{1 - \sin a} \right) \left( \frac{1 + \sin b}{1 - \sin b} \right),$$

$$\operatorname{tang} \left( \frac{1}{4} \varpi + \frac{1}{2} x \right) = \pm \operatorname{tang} \left( \frac{1}{4} \varpi + \frac{1}{2} a \right) \operatorname{tang} \left( \frac{1}{4} \varpi + \frac{1}{2} b \right).$$

*Nota.* — Autres solutions de MM. Jamet; Moret-Blanc; Auguste Morel; Gustave Choquet, maître répétiteur au lycée de Lille; Barthe; Dessoudeix; Berthomieu, élèves au lycée de Bordeaux; Ferdinando Pisani; Joseph Bardelli, à Milan; Sondat, à Annecy.