

FAURE

Théorie des indices

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 16
(1877), p. 249-258

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__249_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1877, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉORIE DES INDICES;

PAR M. FAURE,

Chef d'escadrons d'Artillerie.

[SUITE (*).]

Surfaces homofocales.

114. THÉORÈME. — *Lorsque deux plans E, E' sont conjugués par rapport à deux homofocales, ils sont rectangulaires et conjugués à toutes les homofocales du système.*

Désignant par ρ le paramètre de l'homofocale de la surface S, qui est conjuguée aux deux plans E, E', on a (54)

$$I_{EE'} = \rho \frac{\cos(E, E')}{\pi^2}.$$

(*) *Nouvelles Annales*, 2^e série, t. XV, p. 251, 292, 339, 451, 481, 529. et t. XVI, p. 5, 160, 193.

Si ces deux plans sont conjugués à la surface S , $I_{EE'} = 0$; il faut donc aussi que $\cos EE' = 0$. Les deux plans sont donc rectangulaires, et cela quelle que soit la valeur du paramètre ρ .

115. Deux surfaces homofocales se coupent à angle droit.

Soit m un point commun aux homofocales ρ et ρ' de la surface S , menons les plans tangents en ce point aux deux surfaces. Ces plans sont conjugués par rapport aux deux homofocales, puisque chacun d'eux passe par le point de contact de l'autre. Ils sont donc rectangulaires (114).

116. Lorsque deux homofocales touchent une même droite, les plans tangents menés par cette droite aux deux surfaces sont rectangulaires.

Soient m, m' les points de contact des homofocales ρ, ρ' avec la droite α ; menons par cette droite les plans tangents aux deux surfaces. Ces plans sont conjugués par rapport aux deux homofocales, puisque chacun d'eux passe par le point de contact de l'autre. Ils sont donc rectangulaires.

117. Le lieu du pôle d'un plan fixe M par rapport à un système de surfaces homofocales est une droite perpendiculaire au plan.

Soit m le pôle du plan M par rapport à la surface S ; menons l'homofocale ρ qui touche le plan M , et soit p le point de contact. Joignons pm , et par cette droite imaginons un plan quelconque N . Les plans M et N sont conjugués aux surfaces S et ρ , ils sont donc rectangulaires; et, puisque le plan N est quelconque, il faut que pm soit perpendiculaire au plan M .

118. *Trouver la distance d'un plan tangent à une surface au pôle de ce plan par rapport à une homofocale de cette surface.*

Soient D un plan qui touche l'homofocale ρ de la surface S et d le pôle de ce plan par rapport à S . Par définition, $I_D = \frac{(o, D)(d, D)}{\pi'}$. Mais on a aussi $I_D = \frac{\rho}{\pi^2}$; il en résulte

$$(d, D) = \frac{\rho}{(o, D)}.$$

Remarque. — Si le plan D touchait la surface S et que d fût son pôle par rapport à l'homofocale ρ , on aurait

$$(d, D) = -\frac{\rho}{(o, D)}.$$

119. D'après le n° 54, les indices pris par rapport à la surface S s'expriment à l'aide des paramètres des homofocales de cette surface, d'où il suit que tout théorème relatif aux indices en donne immédiatement un autre relatif aux paramètres des homofocales. Nous ne citerons que les plus simples, déduits des théorèmes énoncés au n° 85.

D'après 7° : *Si par une droite v on mène deux plans conjugués à la surface S , le produit des paramètres des homofocales qui touchent les plans est égal au carré du sinus de l'angle de ces plans multiplié par le produit des paramètres des deux homofocales qui touchent la droite v .*

D'après 9° : *Lorsqu'un angle trièdre est conjugué à la surface S , le produit des paramètres des homofocales qui touchent ses faces, pris en signe contraire, est égal au produit des paramètres des trois homofocales qui passent par son sommet, multiplié par le carré*

du sinus de l'angle solide formé par des normales à ses faces.

D'après 14° : Lorsqu'un tétraèdre est conjugué à la surface S , le produit des paramètres des homofocales qui touchent ses faces, pris en signe contraire, est égal au produit des carrés des demi-axes de la surface S , multiplié par la sixième puissance du sextuple de son volume, divisé par quatre fois le produit des carrés des aires de ses faces.

D'après 25° : Lorsqu'un tétraèdre est conjugué à la surface S , la somme des inverses des paramètres des homofocales qui touchent ses faces, prise en signe contraire, est égale à la somme des carrés des inverses des demi-axes de la surface S .

D'après 30° : Un tétraèdre étant conjugué à la surface S , si l'on désigne par $\rho_A, \rho_B, \rho_C, \rho_D$ les paramètres des homofocales qui touchent ses faces A, B, C, D , et par e un point quelconque, la somme

$$\frac{(e, A)^2}{\rho_A} + \frac{(e, B)^2}{\rho_B} + \frac{(e, C)^2}{\rho_C} + \frac{(e, D)^2}{\rho_D},$$

prise en signe contraire, est égale au produit des paramètres des trois homofocales qui passent au point e , divisé par π^2 .

D'après 34° : Un trièdre $d(A, B, C)$ étant conjugué à la surface S , si par son sommet d on mène une droite arbitraire ε , et si l'on désigne par ρ_A, ρ_B, ρ_C les paramètres des homofocales qui touchent ses faces, la somme

$$\frac{\sin^2 \varepsilon A}{\rho_A} + \frac{\sin^2 \varepsilon B}{\rho_B} + \frac{\sin^2 \varepsilon C}{\rho_C}$$

est égale et de signe contraire au produit des paramètres des deux homofocales qui touchent la droite ε ,

divisé par le produit des paramètres des trois homofocales qui passent par le sommet d .

De ce théorème ou du précédent on peut conclure que, si le point d est le sommet d'un cône circonscrit à la surface S , et $d(ABC)$ un trièdre conjugué à cette surface, l'équation de ce cône sera, e étant un quelconque de ses points,

$$\frac{(e, A)^2}{\rho_A} + \frac{(e, B)^2}{\rho_B} + \frac{(e, C)^2}{\rho_C} = 0.$$

D'après 32° : Si par le sommet d'un trièdre $d(\lambda\mu\nu)$, conjugué à la surface S , on mène un plan quelconque E et que l'on désigne par ρ_E le paramètre de l'homofocale qui touche ce plan,

$$\rho_E = \frac{\sin^2 \lambda E}{\sin^2 \lambda A} \rho_A + \frac{\sin^2 \mu E}{\sin^2 \mu B} \rho_B + \frac{\sin^2 \nu E}{\sin^2 \nu C} \rho_C,$$

ρ_A, ρ_B, ρ_C étant les paramètres des homofocales qui touchent les plans $\mu\nu, \nu\lambda, \lambda\mu$ ou A, B, C .

Lorsque le plan E touche la surface S , $\rho_E = 0$.

D'après 36° : Un dièdre AB étant conjugué à la surface S , si par son arête on mène un plan E , on a

$$\sin^2 AB \rho_E = \sin^2 EB \rho_A + \sin^2 EA \rho_B.$$

D'après 37° : Un angle $\lambda\mu$ étant conjugué à la surface S , si l'on mène par son sommet et dans son plan la droite ε ,

$$\sin^2 \lambda\mu\rho_\varepsilon = \sin^2 \varepsilon\mu\rho_\lambda + \sin^2 \varepsilon\lambda\rho_\mu,$$

en désignant par $\rho_\varepsilon, \rho_\lambda, \rho_\mu$ les produits des paramètres des couples d'homofocales qui touchent les droites $\varepsilon, \lambda, \mu$.

THÉORÈME. — Lorsqu'une droite touche deux homofocales de la surface S , son indice par rapport à S est constant (54).

120. *Corollaires.* — Soit a un point de la surface S , A le plan tangent en ce point; par le point a menons une droite ε , et soit p le point où le diamètre parallèle à cette droite rencontre le plan A , on a (49)

$$I_\varepsilon = -\frac{1}{op^2}.$$

Si nous supposons que la droite ε touche les homofocales ρ et ρ' de S , on a aussi

$$I_\varepsilon = -\frac{\rho\rho'}{\pi^2}.$$

La comparaison de ces expressions conduit à ce théorème : *On donne trois surfaces homofocales S , ρ et ρ' ; une droite ε touche les deux homofocales ρ et ρ' et coupe S au point a , si l'on mène le plan tangent de S au point a et que l'on projette le centre o sur le plan, par une parallèle à ε , le pied p de cette projection décrit une sphère dont le rayon a pour longueur $\frac{\pi}{\sqrt{\rho\rho'}}$.*

La surface S étant un ellipsoïde, ρ et ρ' les deux focales, on a

$$\rho = -\beta^2, \quad \rho' = -\gamma^2;$$

par conséquent le rayon de la sphère dont il vient d'être question a pour longueur $\frac{\pi}{\beta\gamma} = \alpha$, c'est-à-dire le demi-axe majeur de S .

121. Imaginons les cônes circonscrits aux homofocales ρ et ρ' qui ont pour sommets le point a de S ; ces deux cônes ont quatre arêtes communes ε , donnant lieu chacune à l'égalité $I_\varepsilon = -\frac{1}{op^2}$. Il suit de là que les quatre diamètres op sont des arêtes d'un cône de révo-

lution qui a pour axe la perpendiculaire menée du centre sur le plan tangent A. Ainsi, *lorsque par un point a de la surface S on mène les quatre droites qui touchent à la fois deux homofocales de S, ces droites sont situées sur un cône de révolution qui a pour axe la normale de S au point a.*

122. Si l'on désigne par a et b les points d'intersection de la surface S avec la droite ϵ qui touche les deux homofocales ρ et ρ' , et par ϵ_0 le demi-diamètre de S parallèle à ϵ , nous avons

$$I_\epsilon = -\frac{\overline{ab}^2}{4\epsilon_0^4} = -\frac{\rho\rho'}{\pi^2},$$

de sorte que la longueur de la corde ab a pour expression

$$ab = \frac{2\epsilon_0^2}{\pi} \sqrt{\rho\rho'}.$$

Si ρ et ρ' sont les focales de l'ellipsoïde S ,

$$ab = \frac{2\epsilon_0^2}{\alpha}.$$

THÉORÈME. — *Les plans qui touchent une homofocale de la surface S ont le même indice par rapport à S (54).*

123. *Corollaires.* — Soient a un point de la surface S , et A le plan tangent en ce point; par le point a , menons un plan E touchant l'homofocale ρ de la surface S . D'après (54) et (52), on a

$$I_E = \frac{\rho}{\pi^2}, \quad I_E = -\frac{\overline{\sin EA}^2}{(o, A)^2} I_\epsilon,$$

ϵ étant le diamètre de S , parallèle à la tangente AE . De

là résulte

$$\frac{\rho}{\pi^2} = - \frac{\sin^2 EA}{(o, A)^2} I_e.$$

Pour un autre plan E' mené par le point a et touchant l'homofocale ρ , on aurait de même

$$\frac{\rho}{\pi^2} = - \frac{\sin^2 E'A}{(o, A)^2} I_{e'},$$

ϵ' étant le diamètre de S parallèle à la tangente AE' .

124. Ces relations donnent lieu à plusieurs théorèmes :

1° Si les deux plans E, E' passent par la même tangente de S , $I_e = I_{e'}$, et par suite $\sin EA = \sin E'A$. Si par une tangente de S on mène deux plans tangents à l'homofocale ρ , ces plans sont également inclinés sur le plan tangent de S mené par la tangente.

2° Si les plans E, E' passent par la normale au point a de S , on a $I_e = I_{e'}$, puisque les angles $EA, E'A$ sont droits. Les diamètres ϵ, ϵ' de la section diamétrale parallèle au plan tangent A étant égaux sont également inclinés sur les axes de cette section. Or, les sections principales relatives au point a coupent le plan A suivant des parallèles à ces axes; donc, si par une normale de la surface S on mène deux plans tangents à l'homofocale ρ de cette surface, ces deux plans sont également inclinés sur les sections principales menées par cette normale.

3° Si I_e est constant quel que soit le plan E , l'angle EA est aussi constant; le cône circonscrit à l'homofocale ρ et qui a pour sommet le point a est un cône de révolution. Or, pour que ϵ soit constant, il faut que le point a soit un ombilic de S . Le lieu des sommets des cônes de révolution circonscrits à une surface est donc

le même que le lieu des ombilics, des homofocales de cette surface, c'est-à-dire les coniques focales de la surface donnée.

4° Supposons que le point a soit un point commun aux surfaces homofocales S et ρ , le plan tangent E de ρ en ce point étant normal à la surface S , on voit que pour tous les points d d'une ligne de courbure tracée sur la surface S , $\frac{I_c}{(o, A)^2}$ est constant.

C'est le théorème de Joachimsthal, puisque $I_c = -\frac{1}{\varepsilon_0}$, ε_0 étant le demi-diamètre de la surface S , parallèle à l'élément de la ligne de courbure au point a .

125. D'après le n° 52 on a ce théorème : Étant données deux homofocales S et ρ , si l'on mène un plan tangent à ρ et que l'on désigne par E le produit des demi-axes de la section faite dans S , par E_0 le produit des demi-axes de la section diamétrale parallèle à la section, le rapport $\frac{E}{E_0^3}$ est constant et égal à $-\frac{\rho}{\pi^2}$.

En particulier, on voit que, si par le centre de S on mène des plans tangents au cône asymptote de l'homofocale ρ , ces plans déterminent dans S des coniques qui ont le produit de leurs axes constant.

126. D'après le corollaire du n° 84, lorsque trois plans A, B, C sont rectangulaires,

$$I_A + I_B + I_C = \frac{od^2 - S_1^2}{\pi^2},$$

d étant le point d'intersection de ces trois plans, S_1^2 la somme des carrés des demi-axes de S . Or, si ces plans

touchent respectivement les homofocales ρ_A, ρ_B, ρ_C on aura

$$I_A = \frac{\rho_A}{\pi^2}, \quad I_B = \frac{\rho_B}{\pi^2}, \quad I_C = \frac{\rho_C}{\pi^2},$$

de sorte que

$$\rho_A + \rho_B + \rho_C = od^2 - S_1^2,$$

ce qui montre que le lieu du sommet d'un trièdre tri-rectangle, dont les faces touchent trois homofocales ρ_A, ρ_B, ρ_C de S , est une sphère dont le rayon od est donné par la relation

$$od^2 = \rho_A + \rho_B + \rho_C + S_1^2.$$

(*A suivre.*)