

H. LAURENT

**Théorie élémentaire des fonctions elliptiques**

*Nouvelles annales de mathématiques 2<sup>e</sup> série*, tome 16  
(1877), p. 211-215

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1877\\_2\\_16\\_\\_211\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__211_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1877, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

## THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES;

PAR M. H. LAURENT.

[SUITE (\*).]

---

### QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS.

Nous avons trouvé que l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{f(z)}{z-x} dz$$

était égale à  $f(x)$ , la fonction  $f(z)$  étant monodrome, monogène, finie et continue autour du point  $x$ ; soit donc

$$(1) \quad \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{f(z)}{z-x} dz = f(x).$$

---

(\*) *Nouvelles Annales*, 2<sup>e</sup> série, t. XVI, p. 78.

On voit que  $f(x)$  a toujours une dérivée, car on peut ici différentier sous le signe  $\int$  par rapport à  $x$ ; cette dérivée en a une à son tour et ainsi de suite, ce qui est une propriété précieuse des fonctions monodromes et monogènes.

Si, dans la formule (1), on pose  $z = x + re^{i\theta\sqrt{-1}}$ , elle devient

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta\sqrt{-1}} + x) d\theta = f(x);$$

cette formule contient, comme l'on voit, un grand nombre d'intégrales définies. La formule (1) donne, en la différentiant,

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{f(z) dz}{(z-x)^{n+1}} = \frac{1}{1.2.3\dots n} f^n(x),$$

ou, en posant  $z = re^{i\theta\sqrt{-1}} + x$ ,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + re^{i\theta\sqrt{-1}}) \frac{d\theta}{r^n e^{in\theta\sqrt{-1}}} = \frac{1}{1.2.3\dots n} f^n(x).$$

En appelant alors  $M$  le maximum du module de  $f(z)$  sur le cercle de rayon  $r$  décrit du point  $x$  comme centre, on a

$$\frac{1}{2\pi} \frac{M}{r^n} \int_0^{2\pi} d\theta > \text{mod.} \frac{1}{1.2\dots n} f^n(x),$$

ou

$$\text{mod.} f^n(x) < \frac{1.2.3\dots n}{r^n} M,$$

ou

$$M > \frac{r^n \text{mod.} f^n(x)}{1.2.3\dots n}.$$

Cette formule montre que, si toutes les dérivées de  $f(x)$  ne sont pas constamment nulles, c'est-à-dire si  $f(x)$  n'est

pas une constante, on pourra toujours prendre  $r$  assez grand pour que  $M$  croisse au delà de toute limite; donc :

**THÉORÈME.** — *Une fonction monodrome et monogène devient forcément infinie pour une valeur finie ou infinie de sa variable; donc aussi, la considération de son inverse prouve qu'elle s'annule pour une valeur finie ou infinie de sa variable; donc enfin l'équation  $f(x) = 0$  a nécessairement une racine.*

Reprenons les formules

$$(1) \quad \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{f(z) dz}{(z-x)^{n+1}} = \frac{1}{1.2\dots n} f^n(x),$$

$$(2) \quad \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{f(z)}{z-x} dz = f(x);$$

la dernière peut s'écrire

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \left[ \int \frac{f(z)}{z-a} dz + \int \frac{f(z) dz}{(z-a)^2} (x-a) + \dots \right. \\ \left. + \int \frac{f(z)}{(z-a)^n} (x-a)^{n-1} dz \right. \\ \left. + \int \frac{f(z)(x-a)^n}{(z-x)^{n+1}} dz \right] = f(x), \end{aligned}$$

ou, en vertu de (1),

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \dots \\ + \frac{(x-a)^{n-1} f^{n-1}(a)}{1.2.3\dots(n-1)} - \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{f(z)(x-a)^n}{(z-x)^{n+1}} dz. \end{aligned}$$

Ce dernier terme tend vers zéro pour  $n = \infty$ , pourvu que  $x-a$  soit assez petit, et l'on voit que, pour  $x = a$ , toutes les dérivées de  $f(x)$  ne sauraient être nulles, si  $f(x)$  n'est pas une constante. Supposons que les  $(n-1)$  premières dérivées seulement soient nulles et que la  $n^{\text{ième}}$

ne le soit pas, la formule précédente se réduit à

$$f(x) = (x - a)^n \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{f(z) dz}{(z - x)^{n+1}};$$

le facteur de  $(x - a)^n$  ne sera pas nul pour  $x = a$ , et l'on voit que, si  $f(a)$  est nul,  $f(x)$  sera de la forme

$$(x - a)^n \psi(x),$$

$\psi(x)$  restant fini pour  $x = a$ ; donc :

**THÉORÈME.** — *Une fonction monodrome et monogène n'a que des racines d'un ordre de multiplicité entier; il en est de même par suite de ses infinis.*

Voici une dernière proposition très-importante : Soit  $f'(z)$  la dérivée de  $f(z)$ ; les infinis de  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  seront simples et se réduiront aux zéros et aux infinis de  $f(z)$ . Soient  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  les zéros de  $f(z)$  contenus dans le contour C,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  les infinis contenus dans le même contour; alors

$$f(z) = \frac{(z - \alpha_1)^{m_1} (z - \alpha_2)^{m_2} \dots}{(z - \alpha_1)^{n_1} (z - \alpha_2)^{n_2} \dots} \psi(z),$$

$\psi(z)$  n'étant plus ni nul ni infini dans le contour C; prenons les logarithmes et différentions, on aura

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum \frac{m}{z - \alpha} - \sum \frac{n}{z - \alpha} + \frac{\psi'(z)}{\psi(z)}.$$

Multiplicons par  $F(z)$ , qui ne devient ni nul ni infini dans le contour C; nous aurons, en intégrant le long de ce contour,

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{F(z) f'(z)}{f(z)} dz = \sum m F(\alpha) - \sum n F(\alpha).$$

Si l'on fait  $F(z) = 1$ , on trouve  $m = n$ , c'est-à-dire la

différence entre le nombre des zéros et des infinis; mais alors

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int d \log f(z) \\ = [\log f(z)] = m - n,$$

en désignant par  $[\log f(z)]$  la quantité dont varie  $\log f(z)$  le long du contour; or

$$\log f(z) = \log \text{mod.} f(z) - 2\pi\sqrt{-1} \arg. f(z);$$

ainsi  $m - n$  est la quantité dont varie l'argument de  $f(z)$  le long du contour  $C$ , quand le point  $z$  effectue une révolution complète le long de ce contour.

Quand on prend  $F(z) = z$ , on a

$$\int \frac{f'(z)z}{f(z)} dz = \Sigma ma - \Sigma n z. \\ (A \text{ suivre.})$$