Nouvelles annales de mathématiques

Desboves

Formules proposées

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 14 (1875), p. 508-509
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__508_1>

FORMULES PROPOSÉES (*)

PAR M. DESBOVES.

Première question. — Si l'on donne à R, r, r', r'', r''' leur signification ordinaire, et que l'on désigne par x, y, z les rayons des trois cercles, qui touchent intérieurement le cercle circonscrit à un triangle et sont inscrits respectivement dans les angles A, B, C de ce triangle, on a les formules suivantes :

$$x = \frac{4Rr}{r''+r'''}, \quad y = \frac{4Rr}{r'+r'''}, \quad z = \frac{4Rr}{r'+r''},$$

$$4r = 2(x+y+z) - \left(\frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x}\right),$$

$$\frac{1}{2R} + \frac{2}{r} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z},$$

$$\frac{r'}{2Rr} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{x},$$

$$\frac{r''}{2Rr} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z} - \frac{1}{y},$$

$$\frac{r'''}{2Rr} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z}.$$

Par les trois premières formules, on calcule x, y, z,

(*) Extrait de la nouvelle edition des *Questions de Trigonométrie*, qui doit prochainement paraître.

connaissant R, r, r', r'', r''', et, par les autres, on résout la question inverse.

Seconde question. — Si l'on suppose que les trois cercles de l'énoncé précédent soient remplacés par les trois cercles analogues, tangents extérieurement au cercle circonscrit à un triangle, et que l'on désigne par x_1, y_1, z_1 les rayons des nouveaux cercles, on a

$$x_1 = \frac{4Rr'}{r''+r'''}, \quad y_1 = \frac{4Rr''}{r'+r}, \quad z_1 = \frac{4Rr'''}{r'+r}, \quad x_1 y_1 z_1 = 16R^2 r,$$

$$32R^3 - 2R(y_1 z_1 + x_1 z_1 + x_1 y_1) - x_1 y_1 z_1 = 0,$$

$$4x_1 y_1 z_1 r^3 - [(y_1 z_1 + x_1 z_1 + x_1 y_1) r - x_1 y_1 z_1]^2 = 0,$$

et, si l'on pose

$$\frac{r+4R}{2Rm} = \frac{1}{x_1+4R} + \frac{1}{y_1+4R} + \frac{1}{z_1+4R},$$

on a aussi

$$r' = \frac{m x_1}{x_1+4R}, \quad r'' = \frac{m y_1}{y_1+4R}, \quad r''' = \frac{m z_1}{z_1+4R}.$$

Nota. — Pour résoudre les questions précédentes, on pourra prendre pour point de départ les formules suivantes, faciles à démontrer :

$$x \cos^2\frac{A}{2} = y \cos^2\frac{B}{2} = z \cos^2\frac{C}{2} = r,$$

$$x_1 \cos\frac{A}{2} = r', \quad y_1 \cos^2\frac{B}{2} = r'', \quad z_1 \cos^2\frac{C}{2} = r'''.$$