

G. FONTENÉ

## **Théorème pour la discussion d'un système de $n$ équations du premier degré à $n$ inconnues**

*Nouvelles annales de mathématiques 2<sup>e</sup> série*, tome 14 (1875), p. 481-487

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1875\\_2\\_14\\_\\_481\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__481_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1875, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**THÉOREME POUR LA DISCUSSION D'UN SYSTÈME  
DE  $n$  ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ À  $n$  INCONNUES ;**

PAR M. G. FONTENÉ,

Maître répétiteur au lycée Saint-Louis.

*Soit un système de  $n$  équations de premier degré à  $n$  inconnues :*

$$\begin{array}{ll}
 (1) & \left\{ \begin{array}{l} E_1 = a_1^i x_1 + \dots + a_1^f x_f + \dots \\ \quad + a_1^p x_p + a_1^{p+1} x_{p+1} + \dots \\ \quad + a_1^r x_r + \dots + a_1^n x_n - k_1 = 0, \\ \dots\dots\dots \end{array} \right. \\
 (\alpha) & \left\{ \begin{array}{l} E_\alpha = a_\alpha^i x_1 + \dots + a_\alpha^f x_f + \dots \\ \quad + a_\alpha^p x_p + a_\alpha^{p+1} x_{p+1} + \dots \\ \quad + a_\alpha^r x_r + \dots + a_\alpha^n x_n - k_\alpha = 0, \\ \dots\dots\dots \end{array} \right. \\
 (p) & \left\{ \begin{array}{l} E_p = a_p^i x_1 + \dots + a_p^f x_f + \dots \\ \quad + a_p^p x_p + a_p^{p+1} x_{p+1} + \dots \\ \quad + a_p^r x_r + \dots + a_p^n x_n - k_p = 0, \\ \dots\dots\dots \end{array} \right. \\
 (p+1) & \left\{ \begin{array}{l} E_{p+1} = a_{p+1}^i x_1 + \dots + a_{p+1}^f x_f + \dots \\ \quad + a_{p+1}^p x_p + a_{p+1}^{p+1} x_{p+1} + \dots \\ \quad + a_{p+1}^r x_r + \dots + a_{p+1}^n x_n - k_{p+1} = 0, \\ \dots\dots\dots \end{array} \right. \\
 (q) & \left\{ \begin{array}{l} E_q = a_q^i x_1 + \dots + a_q^f x_f + \dots \\ \quad + a_q^p x_p + a_q^{p+1} x_{p+1} + \dots \\ \quad + a_q^r x_r + \dots + a_q^n x_n - k_q = 0, \\ \dots\dots\dots \end{array} \right. \\
 (n) & \left\{ \begin{array}{l} E_n = a_n^i x_1 + \dots + a_n^f x_f + \dots \\ \quad + a_n^p x_p + a_n^{p+1} x_{p+1} + \dots \\ \quad + a_n^r x_r + \dots + a_n^n x_n - k_n = 0. \end{array} \right.
 \end{array}$$

Je suppose différent de zéro le déterminant mineur d'ordre  $p$ , obtenu en supprimant dans le déterminant des coefficients des inconnues les  $p$  premières colonnes et les  $p$  premières lignes. Soit  $D$  ce déterminant.

Je désigne par  $D_{\alpha, q}$  le déterminant mineur d'ordre  $p$ , obtenu en supprimant dans ce même déterminant des coefficients des inconnues :

1° Les  $p$  premières colonnes;

2° Les  $p$  premières lignes, excepté celle de rang  $\alpha$ , et la ligne de rang  $q$ ;  $\alpha$  prend les  $p$  valeurs  $1, 2, \dots, p$ ; et à chacune de ces valeurs correspondent pour  $q$  les  $(n - p)$  valeurs  $(p + 1), \dots, n$ .

Je multiplie les deux membres de l'équation  $(\alpha)$  par  $D$ ,  
 les deux membres de l'équation  $(p + 1)$  par  $(-1) D_{\alpha, p+1}$ ,  
 .....  
 les deux membres de l'équation  $(q)$  par  $(-1)^{q-p} D_{\alpha, q}$ ,  
 .....  
 les deux membres de l'équation  $(n)$  par  $(-1)^{n-p} D_{\alpha, n}$ ,  
 et j'ajoute; j'ai l'équation

$$H_{\alpha} = DE_{\alpha} + (-1) D_{\alpha, p+1} E_{p+1} + \dots + (-1)^{q-p} D_{\alpha, q} E_q + \dots \\ + (-1)^{n-p} D_{\alpha, n} E_n = 0.$$

Il est facile de voir que l'on peut remplacer le système donné par le système

$$\left. \begin{array}{l} H_1 = 0, \\ \dots, \\ H_{\alpha} = 0, \\ \dots, \\ H_p = 0, \\ \\ E_{p+1} = 0, \\ \dots, \\ E_q = 0, \\ \dots, \\ E_n = 0. \end{array} \right\}$$

En effet, si, pour des valeurs des inconnues, le système primitif est vérifié, le système ci-dessus l'est pour les mêmes valeurs.

Réciproquement, si, pour des valeurs des inconnues, le système ci-dessus est vérifié, pour ces mêmes valeurs les  $(n - p)$  dernières équations du système primitif sont vérifiées, et, parmi les  $p$  premières, l'équation  $E_\alpha = 0$ , par exemple, est vérifiée, puisque la relation  $H_\alpha = 0$  se réduit pour ces valeurs à  $DE_\alpha = 0$ , ou  $E_\alpha = 0$ ,  $D$  étant différent de zéro.

Je développe l'équation  $H_\alpha = 0$ .

Le coefficient de  $x_f$  est

$$\alpha_\alpha^f D + (-1) \alpha_{p+1}^f D_{\alpha, p+1} + \dots + (-1)^{q-p} \alpha_q^f D_{\alpha, q} + \dots \\ + (-1)^{n-p} \alpha_n^f D_{\alpha, n},$$

ou le déterminant mineur d'ordre  $p - 1$

$$\begin{vmatrix} \alpha_\alpha^f & \alpha_\alpha^{p+1} & \alpha_\alpha^r & \alpha_\alpha^n \\ \alpha_{p+1}^f & \alpha_{p+1}^{p+1} & \alpha_{p+1}^r & \alpha_{p+1}^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_q^f & \alpha_q^{p+1} & \alpha_q^r & \alpha_q^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n^f & \alpha_n^{p+1} & \alpha_n^r & \alpha_n^n \end{vmatrix},$$

qu'on obtient en supprimant dans le déterminant des coefficients des inconnues les  $p$  premières colonnes, à l'exception de celle de rang  $f$ , et les  $p$  premières lignes, à l'exception de celle de rang  $\alpha$ . Je désignerai ce déterminant par  $\Delta'_\alpha$ .

Le coefficient de  $x_r$ , qui se déduit du précédent en remplaçant  $f$  par  $r$ , est nul, puisque c'est un déterminant qui a deux colonnes identiques; le terme constant, changé de signe, se déduit du coefficient de  $x_f$  en remplaçant la première colonne par  $k_\alpha, k_{p+1}, \dots, k_q, \dots, k_n$ . Pour l'ob-

tenir, on supprime dans le déterminant des coefficients des inconnues les  $p$  premières colonnes, que l'on remplace par une colonne unique  $k_1, k_2, \dots, k_n$ , et dans le tableau obtenu on supprime les  $p$  premières lignes, à l'exception de celle de rang  $\alpha$ . Je désignerai ce déterminant par  $K_\alpha$ .

L'équation  $H_\alpha$  est donc

$$\Delta_{\alpha}^1 x_1 + \dots + \Delta_{\alpha}^f x_f + \dots + \Delta_{\alpha}^p x_p - K_{\alpha} = 0.$$

Le second système, équivalent au premier, est donc

[illegible]

Si l'on suppose nuls les  $p^2$  déterminants  $\Delta_a^f$ , on obtient le théorème suivant :

THÉOREME. — Étant donné un système de  $n$  équations du premier degré à  $n$  inconnues, si le déterminant mineur  $D$  d'ordre  $p$ , obtenu en supprimant dans le déterminant des coefficients des inconnues les  $p$  premières colonnes et les  $p$  premières lignes, est différent de zéro, et si, en outre, les  $p^2$  déterminants mineurs  $\Delta_k$  d'ordre  $(p-1)$ , obtenus en supprimant de toutes les façons possibles les  $p$  premières colonnes sauf une, et les  $p$  pre-

nières lignes sauf une, sont tous nuls; deux cas sont à distinguer :

Ou les  $p$  déterminants  $K_a$ , obtenus en supprimant dans le déterminant des coefficients des inconnues les  $p$  premières colonnes pour les remplacer par une colonne formée des termes constants, et dans le tableau obtenu les  $p$  premières lignes, sauf une, ne sont pas tous nuls; les équations proposées n'ont pas de solution en nombres finis.

Ou ces  $p$  déterminants sont nuls; le système est réductible aux  $(n - p)$  dernières équations; et, si, donnant aux  $p$  premières inconnues des valeurs arbitraires, on considère ces  $(n - p)$  équations comme équations entre les  $(n - p)$  dernières inconnues, le déterminant  $D$  des coefficients de ces inconnues étant différent de zéro; il y a une solution et une seule. (Je suppose traité le cas où le déterminant des coefficients des inconnues est différent de zéro.)

*Remarque.* — Dans le cas des équations homogènes, le système admet toujours, *a priori*, la solution

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0;$$

le cas d'impossibilité ne peut donc se présenter (et, en effet, les déterminants  $K$  sont tous nuls), et il y a réduction à  $(n - p)$  équations.

On conclut de là la remarque suivante, qui constitue une propriété des déterminants et montre clairement l'accord entre le théorème précédent et la discussion connue d'un système de  $n$  équations du premier degré à  $n$  inconnues :

Quand le déterminant  $D$  est différent de zéro, et que les  $p^2$  déterminants mineurs  $\Delta_a$  sont nuls, il arrive que le déterminant des coefficients des inconnues, et tous

*les déterminants mineurs jusqu'à l'ordre  $(p - 1)$  inclusivement sont nuls.*

En effet, considérons le système d'équations homogènes obtenu en supprimant les termes constants dans les équations données ; le déterminant  $D$  étant différent de zéro, et les  $p^2$  déterminants  $\Delta'_x$  étant nuls, les équations se réduisent à  $(n - p)$ , et l'on peut se donner  $p$  inconnues. Or, si le déterminant des coefficients des inconnues, et tous les déterminants mineurs jusqu'à l'ordre  $(p - 1)$  inclusivement n'étaient pas nuls, supposons que le premier différent de zéro fût d'ordre  $p' < p$  ; les  $p'^2$  déterminants  $\Delta'_{x'}$  étant nuls, le système se réduirait à  $(n - p')$  équations, et l'on ne pourrait se donner que  $p'$  des inconnues.

Le théorème qui vient d'être démontré donne la discussion complète d'un système de  $n$  équations du premier degré à  $n$  inconnues :

1° Le déterminant des coefficients des inconnues est différent de zéro : une solution, une seule.

2° Le déterminant des coefficients des inconnues est nul ; un des déterminants mineurs du premier ordre est différent de zéro, soit celui qu'on obtient en supprimant la première ligne et la première colonne ; deux cas :

Où le déterminant  $K_1$  n'est pas nul : impossibilité ;

Où le déterminant  $K_1$  est nul : les  $n$  équations se réduisent aux  $(n - 1)$  dernières ; on peut se donner  $x_1$  arbitrairement, et alors on a, pour les  $(n - 1)$  autres inconnues, un système unique de valeurs.

3° Le déterminant des coefficients des inconnues est nul, et aussi tous les déterminants mineurs du premier ordre ; un des déterminants mineurs du second ordre est différent de zéro, soit celui qu'on obtient en supprimant les deux premières lignes et les deux premières colonnes ; deux cas :

Où les déterminants  $K'_1, K'_2$  ne sont pas nuls tous deux : impossibilité ;

Où ces deux déterminants sont nuls : les  $n$  équations se réduisent aux  $(n - 2)$  dernières ; on peut se donner  $x_1$  et  $x_2$  arbitrairement, et alors on a, pour les  $(n - 2)$  autres inconnues, un système unique de valeurs. Etc., etc.